境界条件に時の微係数を含む場合の境界値問題

小　平　吉　男

Boundary Value Problems with Boundary Conditions Containing Differential Coefficients with respect to Time

by Y. Kodaira

境界条件に時に関する微係数を含む場合の境界値問題は，任意の関数の展開式を求める場合に，空間座標に関する常数のみならず，時の座標に関する常数が入って来る点で，普通の境界値問題と異なっている。以下二，三の例によってその結果を示そう。

1.　板の一面に薄い物質の層を考をえる場合の熱伝導

板に垂直に x 軸を取り，$x=0$ から $x=a$ までの厚さ a の板であるとする。今 $x=a$ の所に薄い物質の層があって，板に接しているが，他の面では熱が逃げ去らない理想的な場合を考える。この薄い物質の層の厚さを l_1 比熱を c'，密度を ρ' とすれば，ここの境界条件は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

のように書かれる。但し $c=\dfrac{k}{c'\rho' l}$ であって，k は板の熱伝導率である。これの条件は板から，物質の薄い層に流れて入る熱量は，この層の温度を昇げるのに使われるという条件である。板から層への熱の流入が速く，薄い層から外へ熱の流出が非常に遅いときには，(1) の条件が略々成立するとみてよかろう。

板の $x=0$ における境界条件を

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

とし，初期条件

$$(u)_{t=0}=f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を与えて，熱伝導の微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

の解を求めることにしよう。

微分方程式 (1) の特解は

$$u=e^{-\kappa^2\alpha^2 t}\,(A_\alpha\cos\alpha x+B_\alpha\sin\alpha x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

の如く書くことが出来るが，これに二つの境界条件を入れれば，固有値は

$$\tan \alpha a = -\frac{\kappa^2 \alpha}{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

が求められる。或は $\alpha a=\xi$ と書けば，(6) は

$$\tan \xi = -\frac{\kappa^2 \xi}{ca} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる。

(7)の根は正負絶対値の等しいものが無限にあることが分っている。又 $\xi=0$ も根である。今正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを μ_s と書くことにすれば，

$$\alpha = \frac{\mu_s}{a}, \quad [s=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots]$$

と書くことが出来る。又 $\mu_0=0$ とする。然るときは微分方程式の解は

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} A_s e^{-\frac{\kappa^2 \mu_s^2}{a^2} t} \cos \frac{\mu_s}{a} x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

のように書いてよい。

(8) に初期条件 (3) を入れれば，

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \cos \frac{\mu_s}{a} x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となり，この展開式が得られれば問題は解ける。(9) に $\cos\frac{\mu_n}{a}x$ を掛けて 0 から a まで積分すれば，

$$\int_0^a f(x) \cos \frac{\mu_s}{a} x\, dx = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \int_0^a \cos \frac{\mu_s}{a} x \cos \frac{\mu_n}{a} x\, dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる

$$\int_0^a \cos \frac{\mu_s}{a} x \cos \frac{\mu_n}{a} x\, dx = \frac{a \cos \mu_s \cos \mu_n}{\mu_s^2 - \mu_n^2} (\mu_s \tan \mu_s - \mu_n \tan \mu_n)$$

$$= -\frac{\kappa^2}{c} \cos \mu_s \cos \mu_n, \quad [s \neq n,\ s \neq 0], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\int_0^a \cos \frac{\mu_n}{a} x\, dx = a \cos \mu_n \cdot \frac{\tan \mu_n}{\mu_n} = -\frac{\kappa^2}{c} \cos \mu_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

となるから，(11) の $s \neq 0$ 制限は必要ないことが分る。この場合は (11)，(12) が 0 とならないこと，即ち直交でないことに注意を要する。 $s=n$ のときには

$$\int_0^a \cos^2 \frac{\mu_n}{a} x\, dx = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu_n} \frac{\tan \mu_n}{1+\tan^2 \mu_n}\right) = \left(1 - \frac{\kappa^2 ca}{c^2 a^2 + \kappa^4 \mu_n^2}\right), \quad [n \neq 0],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\int_0^a dx = a, \qquad [n=0] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

が得られる

(12), (13), (14) により (10) は

$$\int_0^a f(\lambda)\cos\frac{\mu_n}{a}\lambda\, d\lambda = -\frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_n\sum_{s=0}^{\infty}A_s\cos\mu_n$$

$$+A_n\left\{\frac{a}{2}\left(1-\frac{\kappa^2 ca}{c^2a^2+\kappa^4\mu_n^2}\right)+\frac{\kappa^2}{c}\cos^2\mu_n\right\},\ [n\neq 0], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\int_0^a f(\lambda)d\lambda = -\frac{\kappa^2}{c}\sum_{s=0}^{\infty}A_s\cos\mu_n + A_0\left(1+\frac{\kappa^2}{c}\right),\ [n=0] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となる。(15) の両辺に

$$\frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_n\cdot f(a) = \frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_n\sum_{s=0}^{\infty}A_s\cos\mu_s$$

を加えれば,

$$\int_0^a f(\lambda)\cos\frac{\mu_n}{a}\lambda\, d\lambda + \frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_n\cdot f(a) = A_n\frac{a}{2}\left(1-\frac{\kappa^2 ca}{c^2a^2+\kappa^4\mu_n^2}\right),\ [n\neq 0]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

となる。又 (16) の両辺に

$$\frac{\kappa^2}{c}f(a) = \frac{\kappa^2}{c}\sum_{s=0}^{\infty}A_s\cos\mu_s$$

を加えれば

$$\int_0^a f(\lambda)d\lambda + \frac{\kappa^2}{c}f(a) = A_0\left(a+\frac{\kappa^2}{c}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

となる。これから係数が求められる。

(17), (18) から計算出来る係数を (9) に代入すれば次の展開式を得る。

$$f(x) = \frac{c}{ca+\kappa^2}\left(\int_0^a f(\lambda)d\lambda + \frac{\kappa^2}{c}f(a)\right)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\mu_s}{a}x}{1-\dfrac{\kappa^2 ca}{c^2a^2+\kappa^4\mu_s^2}}\left(\int_0^a f(\lambda)\cos\frac{\mu_s}{a}\lambda\, d\lambda + \frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_s\cdot f(a)\right). \cdots(19)$$

又 (8) に係数を入れれば，問題の解となる：

$$u = \frac{c}{ca+\kappa^2}\left(\int_0^a f(\lambda)d\lambda + \frac{u^2}{c}f(a)\right)$$

$$+\frac{2}{a}\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa^2\mu_s^2}{a^2}t}\frac{\cos\frac{\mu_s}{a}x}{1-\frac{\kappa^2 ca}{c^2a^2+\kappa^4\mu_s^2}}\left(\int_0^a f(\lambda)\cos\frac{\mu_s}{a}\lambda\,d\lambda+\frac{\kappa^2}{c}\cos\mu_s f(a)\right). \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

この解を見ると，時が経てば和の記号を以て示される項は次第に消えて，最後に残るのは最初の項のみとなる。最初の項は

$$\left(\int_0^a f(\lambda)\,d\lambda+\frac{\kappa^2}{\rho}f(a)\right)\Big/\left(a+\frac{\kappa^2}{c}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

であるから，板全体の温度がこの温度になるのである。この項の意味を考えてみよう。

$c=\dfrac{k}{c'\rho' l}$，$\kappa^2=\dfrac{\kappa}{\rho}$ であるから (21) は

$$\left(c\rho\int_0^a f(\lambda)d\lambda+c'\rho' lf(a)\right)\Big/(c\rho a+c'\rho' l)$$

である。分子は $t=0$ のときの板と薄い物質の層を加えたものの熱量で，分母はその熱容のである。故にこれらの量の比として最後の温度が与えられるのは当然である。

2. 絃の両端に質量が附けてある場合の横振動

絃の横振動の微分方程式として，最も簡単な式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

を取る。a な長さの両端に同じ大きさの質量が附けてあり，且つ変位に比例する力で元へ戻そうとしているときの境界条件は

$$\left(m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-T\frac{\partial y}{\partial x}+\kappa y\right)_{x=0}=0,\quad \left(m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+T\frac{\partial y}{\partial x}+\kappa y\right)_{y=a}=0 \qquad \cdots\cdots(4),\ (5)$$

の如く書ける。m は質量，T は絃の張力，κ は元へ戻そうとする力を表わす比例の常数である。又初期条件は次のように与えられているとする。

$$(y)_{t=0}=f(x),\quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=F(x). \qquad \cdots\cdots(4),\ (5)$$

微分方程式の解として

$$y=(A_\alpha\cos c\alpha t+B_\alpha\sin cat)(C_\alpha\cos\alpha x+D_\alpha\sin\alpha x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

を用いれば，境界条件 (2)，(3) により

$$C_\alpha(-mc\alpha^2+\kappa)-D_\alpha T\alpha=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$C_\alpha\{1-m^2c^2\alpha^2+\kappa)\cos\alpha a-T\alpha\sin\alpha a\}$$
$$+D_\alpha\{1-mc^2\alpha^2-\kappa)\sin\alpha a+T\alpha\cos\alpha a=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる。これから α を決める式として

$$1-\frac{T\alpha}{-mc^2\alpha^2+\kappa}\tan\alpha-=\left(\frac{-mc^2\alpha^2+\kappa}{Ta}\tan\alpha+1\right), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

或は $\alpha a=\xi$ とおけば

$$\tan\xi=\frac{2\dfrac{\kappa a^2-mc^2\xi^2}{aT\xi}}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\xi^2}{aT\xi}\right)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

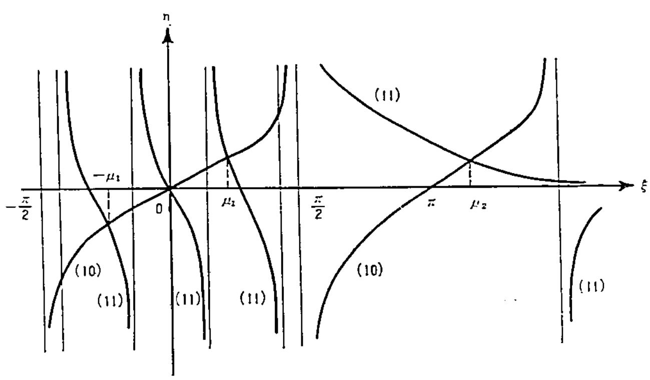
が得られる

(9) には $\xi=0$ なる根があるが，これを用いることは出来ない。又 (9) には正負絶対値の等しい根が存在している。無数に根のあることは，ξ の大きいときに (9) は

$$\tan\xi=\frac{2aT}{mc^2\xi}$$

となることから分る。このことは又

$$\eta=\tan\xi, \qquad \eta=2\frac{\kappa a^2-mc^2\xi^2}{aT\xi}\Big/\left\{1-\left(\frac{\kappa a^2-mc^2\xi^2}{aT\xi}\right)^2\right\} \qquad \cdots(10),\ (11)$$



第 1 図

なる二曲線を η, ξ 座標を用いて画き，その交点を求めても分る。第 1 図はこれら二曲線が画いてある。(9) の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを μ_s と書くことにすれば，

$$\alpha=\frac{\mu_s}{a}, \qquad [s=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots\cdots]$$

となる。

(6) から D_α を C_α を用いて書けば

$$D_\alpha=\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}C_\alpha$$

となるから，微分方程式の解は常数を適当に変えて書き，s に就いての和を取れば，次のようになる：

$$y=\sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\cos\frac{c\mu_s}{a}t+B_s\sin\frac{c\mu_s}{a}t\right)\left(\cos\frac{\mu_s}{a}x+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}x\right). \quad (12)$$

これに初期条件 (4), (5) を入れれば,

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\left(\cos\frac{\mu_s}{a}x+\frac{\kappa a^2-mc\mu_s^2}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}x\right), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}B_s\frac{c\mu_s}{a}\left(\cos\frac{\mu_s}{a}x+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s^2}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}x\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となる。このような展開式が得られれば問題は解かれる。

この問題の固有関数を

$$X_s=\cos\frac{\mu_s}{a}x+\frac{\kappa a^2-mc^2u_s^2}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

と置けば, X_s, X_n は次の微分方程式および境界条件を満足する：

$$\frac{d^2X_s}{dx^2}+\frac{\mu_s^2}{a^2}X_s=0 \qquad \frac{d^2X_n}{dx^2}+\frac{\mu_n^2}{a^2}X_n=0, \qquad \cdots(15),\ (17)$$

$$\left[\frac{dX_s}{ax}-\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_s^2}{a^2}\right)X_s\right]_{x=0}=0,\quad \left[T\frac{dX_s}{dx}+\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_s^2}{a^2}\right)X_s\right]_{x=a}=0, \cdots(18),\ (19)$$

$$\left[\frac{dX_n}{ax}-\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)X_n\right]_{x=0}=0,\quad \left[T\frac{dX_n}{dx}+\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)X_n\right]_{x=a}=0. \cdots(20),\ (21)$$

(11) における A_n を決定するには次の如き積分を作ればよい：

$$\int_0^a f(x)X_n\,dx=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\int_0^a X_s X_n\,dx. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

最初に $s\neq n$ とする。(16), (17) から

$$\frac{\mu_s^2-\mu_n^2}{a^2}\int_0^a X_s X_n\,dx=-\left[X_n\frac{dX_s}{dx}-X_s\frac{dX_n}{dx}\right]_0^a$$

を得るが, これに境界条件 (18)〜(21) を用いれば,

$$\int_0^a X_s X_n\,dx=-\frac{mc^2}{T}\{(X_sX_n)_{x=a}+(X_sX_n)_{x=0}\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

を得る。この場合にもこの積分の値は 0 とならないのである。

$s=n$ の場合には (17) から

$$\frac{\mu_n^2}{a^2}\int_0^a X_n^2\,dx=-\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^a+\int_0^a\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

となる。然るに

$$\frac{\mu_n}{a}X_n=\frac{\mu_n}{a}\cos\frac{\mu_n}{a}x+\frac{1}{T}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)\sin\frac{\mu_n}{a}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\frac{dX_n}{dx}=-\frac{\mu_n}{a}\sin\frac{\mu_n}{a}x+\frac{1}{T}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)\cos\frac{\mu_n}{a}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

であるから，自乗して加え合せれば

$$\frac{\mu_n^2}{a^2}X_n^2+\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2=\frac{\mu_n^2}{a^2}+\frac{1}{T^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

となる。これを 0 から a まで積分し，(24) から最初の項を消去すれば，

$$2\frac{\mu_n^2}{a^2}\int_0^a X_n^2\,dx=\left\{\frac{\mu_n^2}{a^2}+\frac{1}{T^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2\right\}a-\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

を得る。境界条件 (21)，(22) によれば，

$$\left[X_n\frac{dX_n}{dx}\right]_0^a=-\frac{1}{T}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_s^2}{a^2}\right)\{(X_n^2)_{x=a}+(X_n^2)_{x=0}\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

である。又 (29)，(21) を用れば，

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2_{x=a}=\frac{1}{T^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_s^2}{a^2}\right)^2(X_n^2)_{x=a},$$

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2_{x=0}=\frac{1}{T^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2(X_n^2)_{x=0}$$

となるから，これを (27) に代入すれば

$$(X_n^2)_{x=a}=1,\quad (X_n^2)_{x=0}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

を得る。(30) を (26) に代入し，その結果を (28) に代入すれば，次の値が得られる：

$$2\frac{\mu_n^2}{a^2}\int_0^a X_n^2\,dx=\left\{\frac{\mu_n^2}{a^2}+\frac{1}{T^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2\right\}a+\frac{2}{T}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right). \qquad \cdots\cdots\cdots(31)$$

(23) および (31) の値を (27) に代入すれば，

$$\int_0^a f(x)X_n\,dx=-\frac{mc^2}{T}\sum_{s=1}^{\infty}A_s\{(X_sX_n)_{x=0}+(X_sX_n)_{x=0}\}$$

$$+A_n\left[\frac{a^2}{2\mu_n^2}\left\{\frac{\mu_n^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2\right\}+\frac{a^2}{T\mu_n^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{mc^2}{T}\{(X_n^2)_{x=a}+(X_n^2)_{x=0}\}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

となる。今

$$f(a)(X_n)_{x=a}=\sum_{s=1}^{\infty}A_s(X_sX_n)_{x=a},\quad f(0)(X_n)_{x=0}=\sum_{s=1}^{\infty}A_s(X_sX_n)_{x=0}$$

を作り，(32) に加えれば，

$$\int_0^a f(\lambda)X_n\,d\lambda+\frac{mc^2}{T}\{f(a)(X_n)_{x=a}+f(0)(X_n)_{x=0}\}$$

$$=A_n\left[\frac{a}{2}\left\{1+\frac{a^2}{T^2\mu_n^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)^2\right\}+\frac{a^2}{T\mu_n^2}\left(\kappa-\frac{mc^2\mu_n^2}{a^2}\right)+\frac{2mc^2}{T}\right\}\right]$$

を得る。然るに

$$\because\ (X_n)_{x=a}=\cos\mu_n+\left(\frac{\kappa a-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)\sin\mu_n=\cos\mu_n\left(1+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\tan\mu_n\right)$$

$$=\cos\mu_n\left(1+\frac{2\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2}\right)=\cos\mu_n\frac{1+\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2},$$

$$(X_n)_{x=0}=1$$

であるから

$$\int_0^a f(\lambda)X_n d\lambda+\frac{mc^2}{T}\left(f(a)\ \cos\mu_n\frac{1+\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}\right)^2}+f(0)\right)$$

$$=A_n\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT_n\mu_n}\right)^2+\frac{1}{2\mu_n}\left(\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_n{}^2}{aT\mu_n}+\frac{4mc^2}{aT}+1\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

となる。この式から A_n が計算される。

(33) から A_n を計算して (13) に代入すれば次の展開式を得る：

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\mu_s}{a}x+\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}\sin\dfrac{\mu_s}{a}x}{\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}\right)^2+\dfrac{2}{\mu_n}\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\right)+\dfrac{4mc^2}{aT}+1}$$

$$\times\left[\int_0^a f(\lambda)\left(\cos\frac{\mu_s}{a}\lambda+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}\lambda\right)d\lambda\right.$$

$$\left.+\frac{mc^2}{T}\left(f(a)\cos\mu_s\frac{1+\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\right)^2}+f(0)\right)\right].$$

(33) から得られる A_n と同様にして得られる B_n によって，問題の解は次のように書かれる：

$$y=\frac{2}{a}\left[\cos\frac{c\mu_s}{a}t\left\{\int_0^a f(\lambda)\left(\cos\frac{\mu_s}{a}\lambda+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}\lambda\right)d\lambda\right.\right.$$

$$\left.+\frac{mc^2}{T}\left(f(a)\cos\mu_s\frac{1+\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s{}^2}{aT\mu_s}\right)^2}+f(0)\right)\right\}$$

$$+\frac{a}{c\mu_s}\sin\frac{c\mu_s}{a}t\left\{\int_0^a F(\lambda)\left(\cos\frac{\mu_s}{a}\lambda+\frac{\kappa a^2-mc^2\mu_s}{aT\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{a}\lambda\right)d\lambda\right.$$

$$+\frac{mc^2}{T}\left(F(a)\cos\mu_s\frac{1+\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s^2}{aT\mu_s}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s^2}{aT\mu_s}\right)^2}+F(0)\right)\Bigg\}\Bigg]\Bigg]$$

$$\times\frac{\cos\dfrac{\mu_s}{a}x+\dfrac{\kappa a^2-mc^2\mu_s^2}{aT\mu_s}\sin\dfrac{\mu_s}{a}x}{\left(\dfrac{a\kappa^2-mc^2\mu_s^2}{aT\mu_s}\right)+\dfrac{1}{\mu_s}\left(\dfrac{\kappa a^2-\kappa c\mu_s^2}{aT\mu_s}\right)+\dfrac{4mc^2}{aT}+1}.$$

3. 線密度の異なる二つの部分より成る絃に質点を附けた場合の横振動

線密度の異なる二つの部分から成る絃を考へる。その長さは夫々 a_1, a_2 とし, $a_1+a_2=a$ と書く。絃の横振動の微分方程式は夫夫の部分に対し,

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=c_1^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2},\ [0<x<a_1],\qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=c_2^2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2},\ [a_1<x<a] \qquad \cdots\cdots(1),\ (2)$$

が成立するとする。y_1, y_2 は絃の変位を表わす。絃の両端 $x=0$, $x=a$ において絃は止られているとし，境界条件を

$$(y_1)_{x=0},\quad (y_2)_{x=a}=0 \qquad \cdots\cdots(3),\ (4)$$

と置く。二つの部分の繋ぎ目 $x=a_1$ に m なの質量が附けてある場合を考えれば, 其処の境界条件は

$$(y_1)_{x=a_1}=(y_2)_{x=a_1},\quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=a_1}-\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=a_1}=\frac{m}{T}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}\right)_{x=a_1} \qquad \cdots\cdots(5),\ (6)$$

である。初期条件は次の如く与えられるとする：

$$(y_1)_{t=0}=f_1(x),\quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)_{t=0}=F_1(x), \qquad \cdots\cdots(7),\ (8)$$

$$(y_2)_{t=0}=f_2(\lambda),\quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_{t=0}=F_2(x). \qquad \cdots\cdots(9),\ (10)$$

(1)～(5) を満足する解は

$$y_1=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_1\alpha t)\sin c_1\alpha a_2\sin c_2\alpha x, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$y_2=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\sin c_2\alpha a_1\sin c_1x(a-x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

で与えられることは容易に分るであろう。これらを境界条件 (6) に入れれば,

$$c_1\alpha\sin c_2\alpha a_1\cos c_1\alpha a_2+c_2\alpha\sin c_1\alpha a_2\cos c_2\alpha a_1=\frac{m}{T}c_1c_2^2\alpha^2\sin c_1\alpha a_2\sin a_2\alpha a_1$$

となる。$\alpha=0$ は根として採用出来ないから，この式は

$$T(c_1\cot c_1\alpha a_2+c_2\cot c_2\alpha a_1)=mc_1^2c_2^2\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

と変形される。この式から α が決定される。

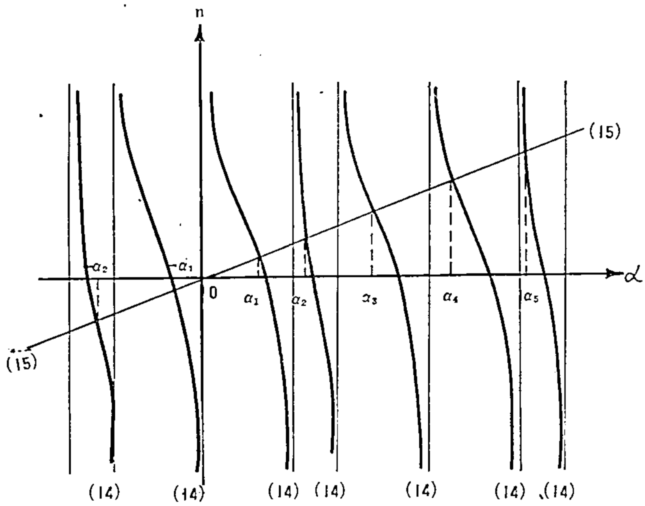
(13) には正負絶対値の等しい根のあることが分る。根が無数にあることは

$$\eta=T(c_1\cot c_1\alpha a_2+c_2\cot c_2\alpha a_1),\quad \eta=mc_1^2c_2^2\alpha \qquad \cdots\cdots(14),\ (15)$$

なる二曲線を α, η 軸を用いて画き, その交点から想像出来る。即ち根は (14) の$\pm\infty$となる点の間にあって，$\pm\infty$となるのは

$$c_1\alpha a_2=\frac{(2m+1)\pi}{2},\ [m=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots],\quad c_2\alpha a_1=\frac{(2n+1)\pi}{2}[n=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots]$$

なる点にある。(14), (15) の曲線は第 2 図に画いてある。ここでは $c_2=2c_1$, $a_2=3a_1$ の場合の図が画いてある。



第 2 図

(13) の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを α_s を以て表わすこととし, この α_s を用いて, s に就いての和を採れば, 境界条件を満足す (1), (2) の解は

$$y_1=\sum_{s=1}^{\infty}(A_s\cos c_1c_2\alpha_s t+B_s\sin c_1c_2\alpha_s t)\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$y_2=\sum_{s=1}^{\infty}(A_s\cos c_1c_2\alpha_s t+B_s\sin c_1c_2\alpha_s t)\sin c_2\alpha_s a_1\sin c_1\alpha_s(a-x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

となる。これらの式では A_α, B_α の代りに A_s, B_s と書いてある。

(16), (17) に初期条件 (7)〜(10) を入れれば

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

$$f_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\sin c_2\alpha_s a_1\sin c_1\alpha_s(a-x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$F_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}B_s c_1c_2\alpha_s\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$F_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}B_s c_1c_2\alpha_s\sin c_2\alpha_{s1}\sin c_2\alpha_s(a-x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

となる。これらの式から A_s, B_s を決定すれば問題は解かれる。

(18), (19) から A_n を決定するには次のような積分を作ればよい：

$$c_2^2 \sin c_1\alpha_n a^2\int_0^{a_1} f_1(x) \sin c_2\alpha_n x dx + c_1^2 \sin c_2\alpha_n a_1\int_{a_1}^{a} f_2(x) \sin c_1\alpha_n (a-x) dx$$

$$= c_2^2\sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_1\alpha_n a_2\int_0^{a_1} \sin c_2\alpha_s x \sin c_2\alpha_n x dx$$

$$+ c_1^2\sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin c_2\alpha_s a_1 \sin c_2\alpha_n a_1\int_{a_1}^{a} \sin c_1\alpha_s (a-x) \sin c_1\alpha_n (a-x) dx. \quad \cdots\cdots\cdots(22)$$

(22) の右辺を計算し，これに (13) を用いれば

$$c_2^2 \sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_1\alpha_n a_2\int_0^{a_1} \sin c_2\alpha_s x \sin c_2\alpha_n x dx$$

$$+ c_1^2 \sin c_2\alpha_n a_1\int_{a_1}^{a} \sin c_1\alpha_s (a-x) \sin c_1\alpha_n (a-x) dx$$

$$= \frac{\sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_1\alpha a_2 \sin c_2\alpha_n a_1 \sin c_2\alpha_n a_1}{\alpha_s^2 - \alpha_n^2}\{\alpha_n(c_2 c_0 t c_2\alpha_n a_1 + c_1 c_0 t c_1\alpha_n a_2)$$

$$- \alpha_s(c_2 c_0 t c_2\alpha_s a_1 + c_1 c_0 t\, c_1\alpha_n a_2)\}$$

$$= -\frac{mc_1^2 c_2^2}{T}\sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_1\alpha_n a_2 \sin c_2\alpha_s a_1 \sin c_2\alpha_n a_2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

$$c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1} \sin^2 c_2\alpha_n x dx + c_1^2 \sin c_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a} \sin^2 c_1\alpha_n (a-x) dx$$

$$= \frac{a_1 c_2^2 \sin c_1\alpha_n a_2 + a_2 c_1^2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2}$$

$$- \frac{\sin^2 c_1\alpha_n a_2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2\alpha_n}(c_2 \cot c_2\alpha_n a_1 + c_1 \cot c_1\alpha_n a_2)$$

$$= \frac{a_1 c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_n a_2 + a_2 c_1^2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2} + \frac{mc_1^2 c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_n a_2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2T} \quad \cdots\cdots(24)$$

となるから (22) は

$$c_2^2 \sin c_1\, \alpha_n a_2\int_0^{a_1} f_1(\lambda) \sin c_2\alpha_n \lambda\, d\lambda + c_1^2 \sin c_2\alpha_n a_1\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda) \sin c_1\alpha_n (a-\lambda) d\lambda$$

$$= -\frac{mc_1^2 c_2^2}{T} \sin c_1\alpha_n a_2 \sin c_2\alpha_n a_1\sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_2\alpha_s a_1$$

$$+ A_n\left(\frac{a_1 c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_n a_2 + a_2 c_1^2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2} + \frac{mc_1^2 c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_n a_2 \sin^2 c_2\alpha_n a_1}{2T}\right)$$

となる。 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は $x=a_1$ において連続であるから， $f_1(a_1)=f_2(a_1)=f(a_1)$ と書くことが出来る。$f(a_1)$ の値は (18) 又は (19) から得られるのであるから，それを用いて

$$\frac{mc_1^2c_2^2}{T}f(a_1)\sin c_1\alpha_n a_2 \sin c_2\alpha_n a_1=$$

$$\frac{mc_1^2c_2^2}{T}\sin c_1\alpha_n a_2 \sin c_2\alpha_n a_1\sum_{s=1}^{\infty}A_s \sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_2\alpha_s a_1$$

なる関係を得る。この関係を (25) の両辺に加えれば，

$$c_2^2\ \sin c_1\alpha_n a_2\int_0^{a1} f_1(\lambda)\sin c_2\alpha_n\lambda d\lambda+c_1^2\sin c_2\alpha_n a_1\int_{a_1}^{a} f(\lambda)\sin c_1\alpha_n(a-\lambda)$$

$$+\frac{mc_1^2c_2^2}{T}f(a_1)\sin c_1\alpha_n a_2\sin c_2\alpha_n a_1$$

$$=\frac{A_n}{2T}\{T(a_1c_2^2\sin_2 c_1\alpha_n a_2+a_2c_1^2\sin^2\sin^2 c_2\alpha_n a_1)$$

$$+mc_1^2c_2^2\sin^2 c_1\alpha_n a_2\sin^2 c_2\alpha_n a_1\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

となり，この式から A_n が決定される。

(26) から得られる A_s を (18) に入れれば，$f_1(x)$ は

$$f_1(x)=2T\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x}{T(a_1c_1^2\sin c_1\alpha_s a_2+a_2c_2\sin^2 c_2\alpha_s a_1)+mc_1c_2a_2\sin^2 c_2\alpha_s a_1}$$

$$\times\left(c_2^2\sin c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin c_2\alpha_s\lambda d\lambda+c_1^2\sin c_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f(\lambda)\sin c_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda\right.$$

$$\left.+\frac{m_1c_1^2c_2^2}{T}f(a_1)\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s a_1\right)$$

にて表わされる。 $f_2(x)$ に対する展開式はこの式の $\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x$ の代りに $\sin c_2\alpha_s a_1$ $\sin c_1\alpha_s(a-x)$ を用いればよい。

又 (26) から得られる A_s と， 同様に得られる B_s を (16)，(17) に入れれば，問題の解が次のように得られる。

$$y_1=2T\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\cos c_1c_2\alpha_s t\left(c_2^2\sin c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin c_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.\right.$$

$$+c_1^2\ \sin\ c_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin c_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda$$

$$\left.+\frac{mc_1^2c_2^2}{T}f(a_1)\ \sin c_1\alpha_s a_2\ \sin c_2\alpha_s a_1\right)$$

$$+\frac{\sin c_1c_2\alpha_s t}{c_1c_2\alpha_s}\left(c_1^2\sin c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}F_1(\lambda)\sin c_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.$$

$$+\ c_1^2 \sin c_2\alpha_s a_1 \int_{a_1}^{a} F_2(\lambda) \sin c_1\alpha_s(a-\lambda)\, d\lambda$$

$$+\frac{mc_1^2c_2^2}{T} F(a_1)\ \sin c_1\alpha_s a_2\ \sin c_2\alpha_s a_1\Big)\Big\}$$

$$\times\frac{\sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_2\alpha_s x}{T(a_1c_1^2 \sin^2 c_2\alpha_s a_1+a_2c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_s a_1+mc_1c_2 \sin^2 c_1\alpha_s a_2 \sin^2 c_2\alpha_s a_1},$$

$$y_2=2T\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\cos c_1c_2\alpha_s t\Big(c_2^2 \sin c_1\alpha_s a_2 \sin c_2\alpha_s a_1 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) \sin c_2\alpha_s \lambda d\lambda$$

$$+c_1^2 \sin c_2\alpha_s a_1 \int_{a_1}^{a} f_2(\lambda) \sin c_1\alpha_s(a-x) d\lambda$$

$$+\frac{mc_1c_2^2}{T} f(a_1)\ \sin c_1\alpha_s a_2\ \sin c_2\alpha_s a_1\Big)$$

$$+\frac{\sin c_1c_2\alpha_s t}{c_1c_2\alpha_s}\Big(c_2^2 \sin c_1\alpha_s a_2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) \sin c_2\alpha_s \lambda d\lambda$$

$$+c_1^2 \sin\ c_2\alpha_s a_1 \int_{a_1}^{a} F_2(\lambda) \sin c_1\alpha_s(a-\lambda) d\lambda$$

$$+\frac{mc_1c_2^2}{T} F(a_1)\ \sin c_1\alpha_s a_2\ \sin c_2\alpha_s a_1\Big)\Big\}$$

$$\times\frac{\sin c_2\alpha_s a_1 \sin c_1\alpha_s(a-x)}{T(a_1c_1^2 \sin^2 c_2\alpha_s a_2+a_2c_2^2 \sin^2 c_1\alpha_s a_2)+mc_1c_2 \sin^2 c_1\alpha_s a_2 \sin^2 c_2\alpha_s a_1}.$$