

構造部材の座屈について

奥 田 克 己

1. はしがき

図-1はトラス構造の簡単な一例を示すもので、部材1と3は圧縮力を受けるから座屈を考慮して設計しなければならない。各部材の軸力を P とし長さを l とすると、この場合

には $P_1=P_3=-W/\sqrt{3}$ で、オイラーの座屈公式によれば、座屈の限界荷重 P_c は

$$P_c = n^2 \pi^2 EI / l^2 \dots\dots\dots(1)$$

で、両端固定なら、 $n=4$ 、両端回転端なら $n=1$ 、であるから、 $n=1$ と仮定して設計すれば安全ではあるが、あまりにも安全過ぎる惧れがある。実際の両端の条件は固定端と回転端の中間であって、隣接部材のこわさに影響される。本文はこのことを考慮した座屈限界の一般解を求めたものである。

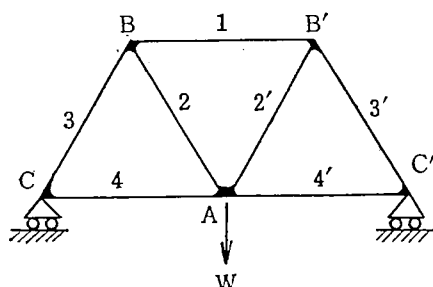


図-1

2. 一般解

図-2のごとく長さ l の棒の両端 A, B は上下ともに変位は拘束されていて、水平荷重 W によって座屈を生じたときにそれぞれたわみ角 θ_1 および θ_2 を生ずるが、隣接部材のこわさにより、たわみ角をもとに戻そうとする曲げモーメントを生ずるものとする。すなわち

$$M_1 = k_1 \theta_1, \quad M_2 = k_2 \theta_2 \dots\dots\dots(2)$$

添字 1, 2 はそれぞれ A, B 端を表わし、 k_1 と k_2 は隣接部材によって定まるこわさ定数で

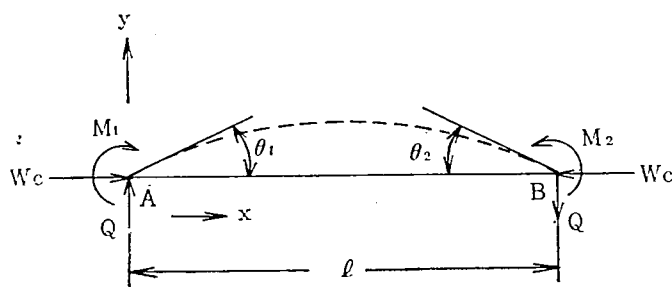


図-2

ある。したがって固定端なら $k=\infty$ 、回転端なら $k=0$ で、一般には k は $\infty > k > 0$ なる有限の値である。また一般には $k_1 \neq k_2$ 、したがって $M_1 \neq M_2$ なので、 A, B 両支点には上下方向の反力を生ずるが、力の釣合上、両者は方向が反対で絶対値は等しくなければな

らないから、これを図のように Q とすると、モーメントの釣合上次式が成立する。

$$Ql = M_2 - M_1 \dots\dots\dots (3)$$

いうまでもなく W が座屈の限界荷重 W_c に達するまでは $M_1 = M_2 = Q = 0$ であって、これらは座屈と同時に発生するものである。

さて A 端を原点として図のように x, y 座標をとれば、棒の任意の断面 x における曲げモーメント M は

$$M = M_1 + Qx - W_c y$$

弾性曲線の方程式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \xi^2 y = (M_1 + Qx) / EI \dots\dots\dots (4)$$

ただし E は弾性係数、 I は断面二次モーメントで、

$$\xi^2 = W_c / EI \dots\dots\dots (5)$$

(4)を解くと

$$y = A \sin \xi x + B \cos \xi x + (M_1 + Qx) / W_c \dots\dots\dots (6)$$

A と B は両端の条件によってきまる積分常数である。

まず $x=0$ で $y=0$ から

$$B = -M_1 / W_c$$

次に $x=0$ で(2)の条件を用いると

$$\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = A\xi + Q / W_c = M_1 / k_1$$

$$\text{または } A = M_1 / k_1 \xi - Q / W_c \xi$$

A と B を入れて(6)を書き直すと

$$y = \left(\frac{M_1}{k_1} - \frac{Q}{W_c} \right) \frac{1}{\xi} \sin \xi x + \frac{M_1}{W_c} (1 - \cos \xi x) + \frac{Qx}{W_c} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{次に } \alpha = \xi l \dots\dots\dots (8)$$

$$m_1 = k_1 l / EI, \quad m_2 = k_2 l / EI \dots\dots\dots (9)$$

とおき、 $x=l$ で $y=0$ とすると

$$\left(\frac{M_1}{\xi k_1} - \frac{Q}{\xi W_c} \right) \sin \alpha + \frac{M_1}{W_c} (1 - \cos \alpha) + \frac{Ql}{W_c} = 0$$

両辺に W_c を乗じ、(3)を用いると

$$\left(\frac{M_1 \alpha^2}{m_1} + M_1 - M_2 \right) \sin \alpha + M_1 \alpha (1 - \cos \alpha) + (M_2 - M_1) \alpha = 0$$

$$\text{または } M_1 \{ (\alpha^2 / m_1 + 1) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \} = M_2 (\sin \alpha - \alpha) \dots\dots\dots (10)$$

次に $x=l$ で(2)の条件を用いると

$$\left(\frac{M_1}{k_1} - \frac{Q}{W_c} \right) \cos \alpha + \frac{M_1 \xi}{W_c} \sin \alpha + \frac{Q}{W_c} + \frac{M_2}{k_2} = 0$$

$W_c l$ を乗じ、(3)を用いて整理すると

$$M_1 \{ (\alpha^2 / m_1 + 1) \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1 \} = -M_2 (\alpha^2 / m_2 + 1 - \cos \alpha) \dots\dots\dots (11)$$

(10)と(11)から M_1 と M_2 とを同時に除くと

$$\alpha^3 \sin \alpha + \alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) (m_1 + m_2) + \{ 2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha \} m_1 m_2 = 0 \dots\dots (12)$$

m_1 と m_2 が知れていれば、本式を解いて α の根を求め、(8)と(5)を用いれば W_c が求まる。

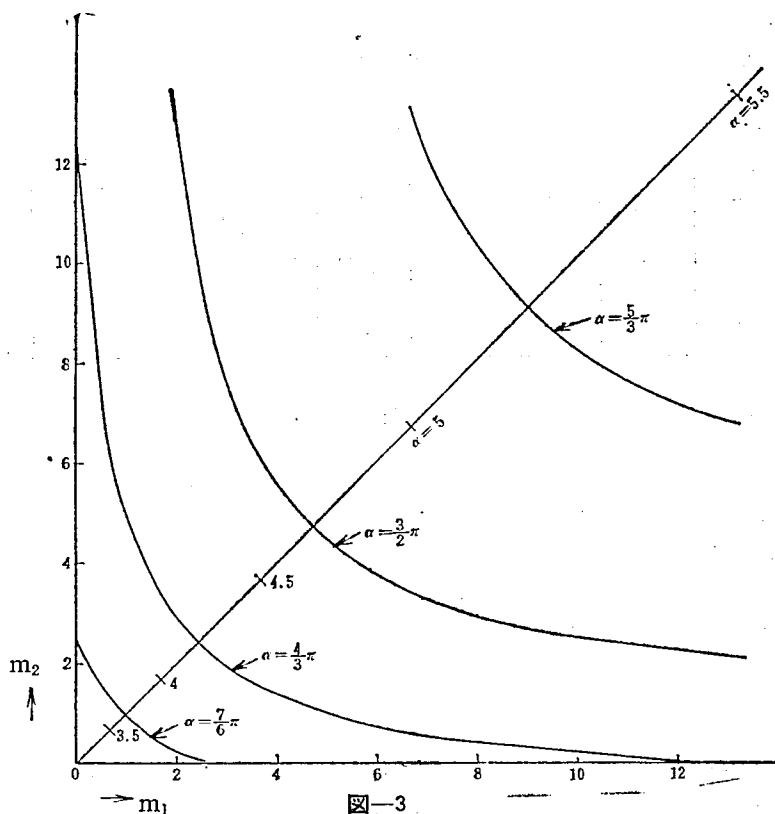


図-3

ただし α の根は無数にあるが、その中の最小値すなわち $2\pi > \alpha > \pi$ の間にあるもの以外は現実の座屈問題には必要でない。(12) から α を求めるにはあらかじめ図-3 のような図表を作っておくと便利である。このように m_1 と m_2 は座屈荷重に直接関係する定数であるから、これを座屈定数と呼ぶことにする。なお(1)の n と α との関係は(5)と(8)により

$$n = \alpha^2 / \pi^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

3. 特殊の場合

先ず左右対称の場合には $k_1 = k_2 = k$, したがって $m_1 = m_2 = m$ で、かつ $M_1 = M_2$, $Q = 0$ となるから、(10)は

$$\alpha \sin \alpha + m(1 - \cos \alpha) = 0$$

$\alpha = 2\beta$ においてこの式をかき改めると

$$\tan \beta = -2\beta/m \quad \dots\dots\dots (14)$$

この式の β の最小根は図-4に示すごとく、曲線 $\tan \beta$ と直線 $(-2\beta/m)$ との交点 P の座標値 β_1 で、 $\pi > \beta_1 > \frac{1}{2}\pi$ の間に必ず1個存在する。したがって α の最小根は $2\pi > \alpha_1 > \pi$ の間に必ず1個存在し、 $m=0$ すなわち両端とも回転

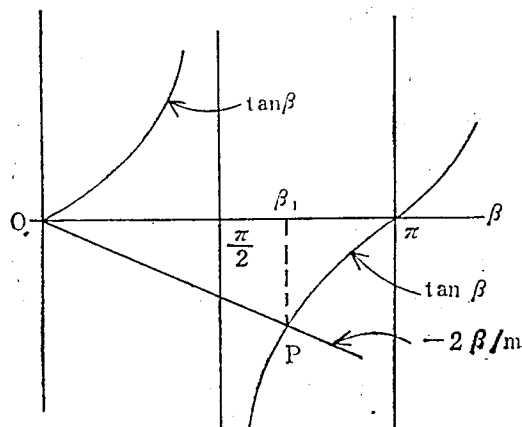


図-4

端なら, $\alpha=\pi$, $n=1$, となり, $m=\infty$ すなわち両端固定なら $\alpha=2\pi$, $n=4$, となってそれぞれオイラー公式と一致する。参考のためにこのときの m と α の関係を表にすると表 1 のごとくなる。

m	0	2	3	4	6	8	∞
α	π	4.064	4.259	4.573	4.805	5.116	2π
n	1	1.67	1.84	2.12	2.24	2.71	4

表 1

次に一端を固定とし, $k_1=\infty$, $m_1=\infty$ とすれば(12)より

$$\alpha(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha\} m_2 = 0$$

ここで B 端を回転端とすれば $m_2=0$ であるから

$$\tan \alpha = \alpha \dots\dots\dots (15)$$

となって, $n \sim 2$ となりオイラー公式と一致する。

4. 座屈定数 m の求め方

図-1に返り部材1の B 端の座屈定数 m_1 について考えるに, この場合には部材2と3に隣接しているので, m_1 を2部分に分けて $m_1 = m_{12} + m_{13}$ とする。もし隣接部材が n 個あるなら, m_1 は n 個の部分より成るものとする。 m_{12} は部材2による B 端の曲げこわさで, 仮りに部材2は A 端が固定され, B 端において支持されている片持はりであるとすれば, B 端に曲げモーメント M_B が作用したときの B 端のたわみ角は $\varphi_B = M_B l_2 / 4EI_2$ であるから, このときの部材1から見た B 端の曲げこわさ k_{12} は $k_{12} = M_B / \varphi_B = 4EI_2 / l_2$ 。ただし l_2 , I_2 は部材2の長さおよび断面二次モーメントである。したがって, 部材1の長さおよび断面二次モーメントを l_1 および I_1 とすれば(9)により

$$m_{12} = \frac{k_{12} l_1}{EI_1} = 4 \frac{I_2 l_1}{I_1 l_2} \dots\dots\dots (16)$$

部材3についても, 全く同様であるが, 仮りに部材3の C 端は単に支持されているだけで回転は自由であるとする, (16)の代りに次のようになる。

$$m_{13} = 3 \frac{I_3 l_1}{I_1 l_3} \dots\dots\dots (17)$$

実際はすべての節点は固定でもなく回転が自由でもなく, その中間にあるので, (16), (17)から明かなように右辺の係数は3と4との中間にあるのが当然である。故に特に正確を期する必要がなければ, 右辺の係数を3としておけば設計上安全側である。かく考えるなら, m_1 は近似的に次のように書ける。

$$m_1 \sim 3 \left\{ \frac{I_2 l_1}{I_1 l_2} + \frac{I_3 l_1}{I_1 l_3} + \dots\dots\dots \right\} \dots\dots\dots (18)$$

またもし $l_1 = l_2 = l_3$ でかつ $I_1 = I_2 = I_3$ なら

$$m_1 \sim 3n \dots\dots\dots (19)$$

n は隣接部材の数である。なおもし—そう厳密を期するならば(16), (17)の右辺の係数 3 ~ 4 を正確に求めることは勿論可能である。

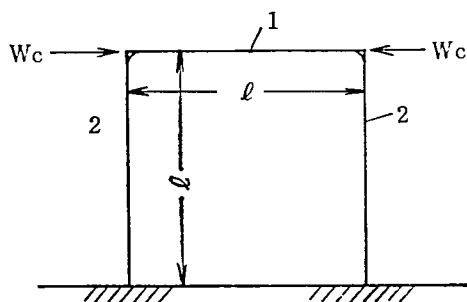


図-5

例題 図-5の部材1の座屈荷重を求む。ただし $I_1 = I_2$, $I_1 = I_2$ とする。

〔解〕 左右対称であるから $m_1 = m_2 = m$ で、(16)から $m = 4$ である。したがって表1から $\alpha = 4.573$, $n = 2.120$, すなわち、両端固定としたときの $n = 4$, と両端回転端としたときの $n = 1$ とのほぼ中間であることが知られる。