

相異なる二つの物質より成る板の 境界条件に時の函数を含む場合の熱伝導

小 平 吉 男

Conduction of Heat in One-Dimension in a Slab Composed of Two Different Materials, with Boundary Conditions Involving Functions of Time.

Y. Kodaira

相異なる二つの物質より成る一次元の熱伝導の問題については、著者は本紀要に二回*発表したが、今回は境界条件に時の函数を含む場合の二、三の例を示そう。この場合の解は、既に得られた時の函数を含まない熱伝導の問題の解から、容易にその解法を類推することが出来るので、寧ろ前二回の場合より簡単に解が得られるとも言ひ得るであろう。

I 表面の温度が時の函数の場合

$x=0$ から $x=a_1$ までと、 $x=a_1$ から $x=a$ までの物質が異なるとし、熱伝導の微分方程式として

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, [0 < x < a_1], \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, [a_1 < x < a] \quad (1), (2)$$

を採る。脚符 1, 2 は夫々 $x=a$ から $x=a_1$ までの物質、 $x=a_1$ から $x=a$ までの物質に対する物理的諸量に対して附けてある。

$x=0$ の温度が時の函数でとし、

$$(u_1)_{x=0} = \Psi(t) \quad (3)$$

なる境界条件を与える。 $x=a$ 温度は 0 であるとし

$$(u_2)_{x=a} = 0 \quad (4)$$

とする。 $x=a_1$ に於いては熱の湧出の如き現象がないとして、境界条件として

$$(u_2)_{x=a_1} = (u_1)_{x=a_1}, \quad k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=a_1} = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a_1} \quad (5), (6)$$

を用いる。又初期条件としては次の如き簡単なものを用いる：

$$(u_1)_{t=0} = 0, \quad (u_2)_{t=0} = 0. \quad (7), (8)$$

微分方程式 (1), (2) の解として

$$u_1 = e^{i\alpha t} \left(A_{1,\alpha} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + B_{1,\alpha} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) \right), \quad (9)$$

$$u_2 = e^{i\alpha t} \left(A_{2,\alpha} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a - x) + B_{2,\alpha} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a - x) \right)$$

を採れば都合よいことが了解出来るであろう。

境界条件 (4) によれば $A_{2,\alpha} = 0$ である。境界条件(7)によれば、

* 明星大学研究紀要第 1 冊 (1964) 25 頁,
" " 第 2 冊 (1965) 21 頁.

$$A_{1,\alpha} = B_{2,\alpha} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2, \quad B_{1,\alpha} \frac{k_1}{\kappa_1} = B_{2,\alpha} \frac{k_2}{\kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \quad (11), (12)$$

となる。但し $a_2 = a - a_1$ である。これらの式から

$$B_{2,\alpha} = \frac{A_{1,\alpha}}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_2}, \quad B_{1,\alpha} = A_{1,\alpha} \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \coth \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2$$

が得られて、これを (9), (10) に代入すれば、次の如くなる：

$$u_1 = A_{1,\alpha} e^{i\alpha t} \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2}, \quad (13)$$

$$u_2 = A_{1,\alpha} e^{i\alpha t} \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a - x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2}. \quad (14)$$

(13) を α に就いて積分し、境界条件 (3) に代入すれば

$$\begin{aligned} u_1 &= \int A_{1,\alpha} e^{i\alpha t} \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2} d\alpha \\ &= \Psi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

となる。(15)の右辺の最後の式は $\Psi(t)$ の Fourier 積分である。

(15) から $A_{1,\alpha}$ が決定されるから、(13), (14) は次のようになる：

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} (a_1 - x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1} \Psi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau, \quad (16)$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a - x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1} \Psi(\tau) e^{i\alpha(t-\tau)} d\tau. \quad (17)$$

(16), (17) を計算するために $\xi = \alpha + i\beta$ と置き、 ξ 平面上に於いて

$$\int \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} (a_1 - x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1} e^{i\xi(t-\tau)} d\xi \quad (18)$$

$$\int \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1} e^{i\xi(t-\tau)} d\xi \quad (19)$$

を考える。被積分函数の極は

$$\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 = 0 \quad (20)$$

を満足する所にある。今

$$\frac{\tan \kappa_1 \alpha a_2}{\tan \kappa_2 \alpha a_1} + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} = 0 \quad (21)$$

を満足する正根を大きさの順序に並べて s 番目の

ものを α_s と書くことにすれば、

$$\sqrt{i\xi} = i\kappa_1 \kappa_2 \alpha_s, \quad [s=1, 2, 3\cdots]$$

の所で(20)は満足される。即ち

$$\xi = i\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2, \quad [s=1, 2, 3\cdots].$$

最初 $t-\tau > 0$ とし、(18)を第1図の積分路に沿って取った積分を考える。正の虚軸上の小さな半円は(18)の極を中心とした半径の小さい半円である。実軸に沿うての積分の値を I_1 を以て表わすこととする。然るときは、

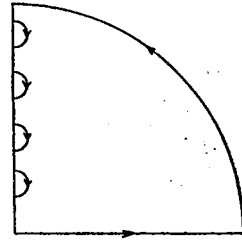


Fig. 1.

$$\begin{aligned} I_1 = iP \int_0^\infty & \frac{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1-x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1-x)}{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1} e^{-\beta(t-\tau)} d\beta \\ & + \pi i \sum_{s=1}^\infty \left\{ i \left(\sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s (a_1-x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cos \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_s (a_1-x) \right) \right\} \\ & \div \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{\xi}} \left(\frac{a_2}{\kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{a_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \frac{a_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \frac{a_1}{\kappa_1} \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \right) \right]_{\xi = i\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2} \\ & \times e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)} \end{aligned}$$

となる。但し P は主値を表わす。上の式の右辺の第二項の和の中の分母は

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \frac{1}{2\kappa_1 \kappa_2 \alpha_s} \left\{ \frac{a_2}{\kappa_2} \left(\cos \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s a_1 - \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_s a_1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_1}{\kappa_1} \left(-\sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_s a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cos \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s a_1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\kappa_1 \kappa_2 \alpha_s} \left\{ \frac{a_2}{\kappa_2} \left(\cos \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s a_1 + \frac{\tan \kappa_1 \alpha_s a_2}{\tan \kappa_2 \alpha_s a_1} \sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_s a_1 \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{a_1}{\kappa_1} \left(\sin \kappa_1 \alpha_s a_1 \sin \kappa_2 \alpha_s a_1 + \frac{\tan \kappa_1 \alpha_s a_2}{\tan \kappa_2 \alpha_s a_1} \cos \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s a_1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\kappa_1 \kappa_2 \alpha_s} \left(\frac{a_2}{\kappa_2} \frac{\cos \kappa_2 \alpha_s a_1}{\cos \kappa_1 \alpha_s a_2} - \frac{a_1}{\kappa_1} \frac{\sin \kappa_1 \alpha_s a_2}{\sin \kappa_2 \alpha_s a_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\kappa_1\kappa_2\alpha_s} \left(\frac{a_2}{\kappa_2} \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \frac{\cos \kappa_2\alpha_s a_1}{\cos \kappa_1\alpha_s a_2} + \frac{a_1}{\kappa_1} \frac{\sin \kappa_1\alpha_s a_2}{\sin \kappa_2\alpha_s a_1} \right) \\
&= -\frac{1}{2k_1\kappa_1^2\kappa_2^3} \frac{a_1 k_1 \kappa_2^2 a_2 + a_2 k_1 \kappa_1^2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1}{\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1}
\end{aligned}$$

となり，分子は

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= i \left\{ \sin \kappa_2\alpha_s x \left(\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1 - \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \cos \kappa_1\alpha_s a_2 \cos \kappa_2\alpha_s a_1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos \kappa_2\alpha_s x \left(\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \cos \kappa_2\alpha_s a_1 + \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \cos \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1 \right) \right\} \\
&= i \left(\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1 + \frac{\tan \kappa_1\alpha_s a_2}{\tan \kappa_2\alpha_s a_1} \cos \kappa_1\alpha_s a_2 \cos \kappa_2\alpha_s a_1 \right) \sin \kappa_2\alpha_s x \\
&= i \frac{\sin \kappa_1\alpha_s a_2}{\sin \kappa_2\alpha_s a_1} \sin \kappa_2\alpha_s x
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
I_1 &= iP \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1 - x)}{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1} e^{-\beta(t-\tau)} d\beta \\
&\quad + 2\pi k_1 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s x}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)}, \\
&\hspace{25em} [t-\tau > 0] \quad (24)
\end{aligned}$$

を得る。同様に (19) を，同じ積分路に沿って積分し，実軸に沿って取った積分を値を I_2 とすれば，次のようになる：

$$\begin{aligned}
I_2 &= iP \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_1 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1} e^{-\beta(t-\tau)} d\beta \\
&\quad + 2\pi k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_1\alpha_s (a-x)}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)} \\
&\hspace{25em} [t-\tau > 0] \quad (25)
\end{aligned}$$

$t-\tau < 0$ の場合には第 2 図の積分路に沿って積分する。この積分路内及び積分路上に極はないから次のようになる：

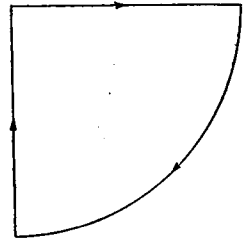


Fig. 2.

$$I_1 = -i \int_0^\infty \frac{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1 - x) + \frac{k_2 \kappa_1}{k_2 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} (a_1 - x)}{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_2 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1} e^{s(t-\tau)} d\beta, \quad [t-\tau < 0], \quad (26)$$

$$I_2 = -i \int_0^\infty \frac{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2 \kappa_1}{k_1 \kappa_2} \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1} e^{s(t-\tau)} d\beta, \quad [t-\tau < 0]. \quad (27)$$

(24), (25), (26), (27)により, I_1 及び I_2 の実数の部分をとれば次のようになる:

$$\begin{aligned} RI_1 &= 2\pi k_1 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_s x}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_s a_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)} \\ &= 0, \quad [t-\tau > 0], \\ & \quad [t-\tau < 0], \\ RI_2 &= 2\pi k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin^2 \kappa_2 \alpha_s a_1 \sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_1 \alpha_s (a-x)}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 + k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_s a_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)}, \\ &= 0, \quad [t-\tau > 0], \\ & \quad [t-\tau < 0]. \end{aligned}$$

上の値を(26)及び(27)に入れれば, 問題の解が次の如く得られる:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2k_1 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 \cos \kappa_2 \alpha_s x}{a_2 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_s a_1} \int_0^t \psi(\tau) e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)} d\tau, \\ u_2 &= 2k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^3 \sum_{s=1}^\infty \frac{\sin \kappa_2 \alpha_s a_1 \sin \kappa_1 \alpha_s a_2 \sin \kappa_1 \alpha_s (a-x)}{a_2 k_2 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_s a_1} \int_0^t \psi(\tau) e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_s^2 (t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

II I の場合と同じ固体を考え, 二つの物質の境界面に於いて熱の発生があるとし, 而もその熱量が時の函数である場合を取る。微分方程式は I の場合と同じものを用い, 境界条件及び初期条件を次のように採る:

$$(u_1)_{x=0}=0, \quad (u_2)_{x=a}=0 \quad (28), (29)$$

$$(u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=a_1} - k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a_1} = Q(t), \quad (30), (31)$$

$$(u_1)_{t=0}=0, \quad (u_2)_{t=0}=0. \quad (32), (33)$$

熱伝導の微分方程式の解として

$$u_1 = e^{i\alpha_1 t} \left(A_{\alpha_1} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha_1}{\kappa_1^2}} x + B_{\alpha_1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha_1}{\kappa_1^2}} x \right), \quad (34)$$

$$u_2 = e^{i\alpha_2 t} \left(A_{\alpha_2} \cosh \sqrt{\frac{i\alpha_2}{\kappa_2^2}} (a-x) + B_{\alpha_2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha_2}{\kappa_2^2}} (a-x) \right) \quad (35)$$

を取ることが出来る。境界条件(28), (29)により, $A_{\alpha_1}=0, \beta_{\alpha_2}=0$ であるから,

$$u_1 = B_{\alpha_1} e^{i\alpha_1 t} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha_1}{\kappa_1^2}} x, \quad u_2 = B_{\alpha_2} e^{i\alpha_2 t} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha_2}{\kappa_2^2}} \quad (36), (37)$$

となる 境界条件(30), (31)は t の如何に関らず成立しなければならないから $\alpha_1 = \alpha_2$ である。
又 B_{α_1} , B_{α_2} の代りに $B_{\alpha,1}$, $B_{\alpha,2}$ と書けば, 境界条件(30)により,

$$B_{\alpha,1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 = B_{\alpha,2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2$$

である。これは

$$B_{\alpha,1} = A_\alpha \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2, \quad B_{\alpha,2} = A_\alpha \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1$$

によって満足される。 A_α は任意の常数を表わす。これを(34), (35)に代入して α に関して積分すれば, 次のようになる:

$$u_1 = \int A_\alpha e^{i\alpha t} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} x \, d\alpha, \quad (38)$$

$$u_2 = \int A_\alpha e^{i\alpha t} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a-x) \, d\alpha. \quad (39)$$

これに境界条件(31)を代入すれば,

$$\begin{aligned} & \int A_\alpha e^{i\alpha t} \sqrt{i\alpha} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \right) d\alpha \\ & = Q(t) \end{aligned} \quad (40)$$

を得る。右辺を Fourier 積分で表わしたものと比較すれば,

$$\begin{aligned} & A_\alpha \sqrt{i\alpha} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \right) \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\alpha\tau} Q(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

とすればよいことがわかる。これから得られる A_α を(38), (39)に入れば次の如くなる:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{i\alpha(t-\tau)} \\ & \times \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} x}{\sqrt{i\alpha} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} Q(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{i\alpha(t-\tau)} \\ & \times \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sqrt{i\alpha} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\alpha}{\kappa_1^2}} a_1 \right)} Q(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

上の積分を計算するために $\xi = \alpha + i\beta$ 平面上に於ける複素積分:

$$\int e^{i\xi(t-\tau)} \frac{\sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} x}{\sqrt{i\xi} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\xi, \quad (44)$$

$$\int Q^{i\xi(t-\tau)} \frac{\sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sqrt{i\xi} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\xi \quad (45)$$

を考える。被積分函数の極は

$$\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 = 0,$$

即ち

$$\frac{\tanh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1}{\tanh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2} + \frac{\frac{k_1}{\kappa_1}}{\frac{k_2}{\kappa_2}} = 0 \quad (46)$$

の所にある。今

$$\sqrt{i\xi} = i\kappa_1\kappa_2\mu, \text{ 即ち } \xi = i\kappa_1^2\kappa_2^2\mu^2$$

と置けば(46)は

$$\frac{\tan \kappa_1\mu a_2}{\tan \kappa_2\mu a_1} + \frac{k_1\kappa_1}{k_2\kappa_2} = 0 \quad (47)$$

となる。この式の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを μ_s とすると、 μ は

$$\mu = \pm\mu_s, [s=1, 2, 3\cdots]$$

にて与えられる。即ち被積分函数の極は

$$\xi = i\kappa_1^2\kappa_2^2\mu_s^2, [s=1, 2, 3\cdots]$$

の所にある。

最初 $t-\tau > 0$ とし、(44)を第1図と類似の積分路に沿って積分することとする。実軸に沿っての積分の値を I_3 とすれば、

$$\begin{aligned} I_3 = & iP \int_0^\infty e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} x}{\sqrt{\beta} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_1 \cos\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \cos\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\beta \\ & - \pi i \sum_{s=1}^\infty e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2(t-\tau)} (a_2 \sin \kappa_1\mu_s a_2 \sin \kappa_2\mu_s x) \\ & + \left[ik_1\kappa_2\mu_s \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{\xi}} \left\{ \frac{k_1}{\kappa_2} \left(a_2 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_1}{\kappa_1} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2}{\kappa_2} \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{a_2}{\kappa_2} \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh\sqrt{\frac{i\xi}{\kappa_1^2}} a_1 \right\} \right] \Big]_{\xi = i\kappa_1^2\kappa_2^2\mu_s^2} \end{aligned}$$

となる。この式の最後の項の分母は(43)の分母に $ik_1\kappa_1\mu_s$ を掛けたものであるから、容易に

$$\text{分母} = \frac{-i\mu_s}{2\kappa_1^2\kappa_2^2} \frac{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1\mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2\mu_s a_1}{\sin \kappa_1\mu_s a_2 \sin \kappa_2\mu_s a_1}$$

であることがわかる。故に

$$I_3 = iP \int_0^\infty e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} x}{\sqrt{\beta} \left(\frac{k_2}{\kappa_1} \sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_2 \cos\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sin\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \cos\sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\beta$$

$$+ 2\pi \kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} \frac{\sin^2 \kappa_1 \mu_s a_2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1 \sin \kappa_2 \mu_s x}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1}, \quad [t-\tau > 0] \quad (49)$$

が得られる。

同様に(49)の実軸に沿うての積分の値を I_4 とすれば

$$I_4 = iP \int_0^{\infty} e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sqrt{\beta} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sin \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_2 \cos \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \right)} d\beta \\ + 2\pi \kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} \frac{\sin^2 \kappa_2 \mu_s a_1 \sin \kappa_1 \mu_s a_2 \sin \kappa_1 \mu_s (a-x)}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1}, \quad [t-\tau > 0]. \quad (50)$$

又 $t-\tau < 0$ の場合には第 2 図の積分路に沿うて積分すれば、次の式を得ることがわかるであらう：

$$I_3 = -i \int_0^{\infty} e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} x}{\sqrt{\beta} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\beta, \quad [t-\tau < 0] \quad (51)$$

$$I_4 = -i \int_0^{\infty} e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} (a-x)}{\sqrt{\beta} \left(\frac{k_1}{\kappa_1} \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 + \frac{k_2}{\kappa_2} \sinh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_1^2}} a_1 \cosh \sqrt{\frac{\beta}{\kappa_2^2}} a_2 \right)} d\beta, \quad [t-\tau < 0]. \quad (52)$$

(49)~(51)から、 I_3 、 I_4 の実数の部分は次の如くなる：

$$RI_3 = 2\pi \kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} \frac{\sin^2 \kappa_1 \mu_s a_2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1 \sin \kappa_2 \mu_s x}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1}, \quad [t-\tau > 0], \\ = 0, \quad [t-\tau < 0],$$

$$RI_4 = 2\pi \kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} \frac{\sin \kappa_1 \mu_s a_2 \sin^2 \kappa_2 \mu_s a_1 \sin \kappa_1 \mu_s (a-x)}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1}, \quad [t-\tau > 0], \\ = 0, \quad [t-\tau < 0].$$

上の値により u_1 及び u_2 は次の如く書かれる：

$$u_1 = 2\kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \kappa_1 \mu_s a_2 \sin \kappa_2 \mu_s a_1 \sin \kappa_2 \mu_s x}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \mu_s a_1} \int_0^t Q(\tau) e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} d\tau, \\ u_2 = 2\kappa_1^2 \kappa_2^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa_1 \mu_s a_2 \sin^2 \kappa_2 \mu_s a_2 \sin \kappa_1 \mu_s (a-x)}{a_1 k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \mu_s a_2 + a_2 k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_2 \mu_s a_1} \int_0^t Q(\tau) e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \mu_s^2 (t-\tau)} d\tau.$$

III 境界条件及び初期条件がもっと一般的な場合, 例えば

$$(u_1)_{x=0}=\Psi(t), \quad (u_2)_{x=a}=0$$

$$(u_1)_{x=a_1}=(u_2)_{x=a_1}, \quad k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=a_1}-k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=a_1}=Q(t),$$

$$(u_1)_{t=0}=f_1(x), \quad (u_2)_{t=0}=f_2(x)$$

のような場合には

$$u_1=u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,3}, \quad u_2=u_{2,1}+u_{2,2}+u_{2,3}$$

と置き $u_{1,1}$, $u_{1,2}$, $u_{1,3}$ は微分方程式(1), $u_{2,1}$, $u_{2,2}$, $u_{2,3}$ は微分方程式(2)を満足するとし, 且つ, 境界条件及び初期条件を次のように取ればよいことが容易に分るであろう。

$$(u_{1,1})_{x=0}=\Psi(t), \quad (u_{2,1})_{x=a}=0,$$

$$(u_{1,1})_{x=a_1}=(u_{1,1})_{x=a_1}, \quad k_1\left(\frac{\partial u_{1,1}}{\partial x}\right)_{x=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x}\right)_{x=a_1},$$

$$(u_{1,1})_{t=0}=0, \quad (u_{2,1})_{t=0}=0;$$

$$(u_{1,2})_{x=0}=0, \quad (u_{2,2})_{x=a}=0,$$

$$(u_{1,2})_{x=a_1}=(u_{2,2})_{x=a_1}, \quad k_1\left(\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x}\right)_{x=a_1}-k_2\left(\frac{\partial u_{2,2}}{\partial x}\right)_{x=a_1}=Q(t),$$

$$(u_{1,2})_{t=0}=0, \quad (u_{2,2})_{t=0}=0;$$

$$(u_{1,3})_{x=0}=0, \quad (u_{2,3})_{x=a}=0,$$

$$(u_{1,3})_{x=a_1}=(u_{2,3})_{x=a_1}, \quad k_1\left(\frac{\partial u_{1,3}}{\partial x}\right)_{x=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_{2,3}}{\partial x}\right)_{x=a_1},$$

$$(u_{1,3})_{t=0}=f_1(x), \quad (u_{2,3})_{t=0}=f_2(x).$$

$u_{1,1}$ 及び $u_{2,1}$ は本論文の I の解で与えられ, $u_{1,2}$, $u_{2,2}$ は II の解で与えられている。

$u_{1,3}$, $u_{2,3}$ は著者が前に発表した方法によれば解が得られる。