二つの相異なる部分よりなる絃の振動の解に対する注意

小　平　吉　男

A Note on the Solution of the Vibration of a String Composed of Two Different Parts

Y. Kodaira

I. 問 題 の 提 起 1.

長さ a なる絃があって，線密度の異なる二つの部分より成るとする。$x=0$ から $x=a_1$ までと，$x=a_1$ から $x=a$ までの部分の線密度は異なり，夫々の部分に対する諸量には夫々 1, 2 の脚符を附けて表わす。絃の振動の微分方程式として

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=c_1{}^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2},\quad [0<x<a_1],\quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=c_2{}^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2},\quad [a_1<x<a] \tag{1), (2}$$

を採る。絃は両端に於いて止められているとし，そこの境界条件として

$$(y_1)_{x=0}=0,\qquad (y_2)_{x=a}=0 \tag{3), (4}$$

をとる。絃が $x=a$ にて絃が繋っている条件として

$$(y)_{x=a_1}=(y_2)_{x=a_1},\qquad \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=a_1}=\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=a_1} \tag{5), (6}$$

を用いる。初期条件は次の如く与えられているとする:

$$(y_1)_{t=0}=f_1(x),\qquad \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)_{t=0}=F_1(x), \tag{7), (8}$$

$$(y_2)_{t=0}=f_2(x),\qquad \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)_{t=0}=F_2(x). \tag{9), (10}$$

II. 問 題 の 解 き 方 1

この問題の解き方は前論文* に述べてあるので，詳しくは述べないが，参考のために簡単に結果を記して置く。

微分方程式 (1), (2) の特解で，境界条件 (3), (4), (5) を満足するものは

$$y_1=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\sin c_1\alpha a_2\sin c_2\alpha x, \tag{11}$$

$$y_2=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\sin c_2\alpha a_1\sin c_1\alpha(a-x) \tag{12}$$

である。A_α, B_α は t, x を含まないが，一般には α を含む常数である。

境界条件 (6) により，

$$c_2\sin c_1\alpha a_2\cos c_2\alpha a_1+c_1\sin c_2\alpha a_1\cos c_1\alpha a_2=0,$$

或は

* 明星大学紀要，理工篇第一号，25 頁

$$\frac{\tan c_1\alpha a_2}{\tan c_2\alpha a_1}+\frac{c_1}{c_2}=0 \tag{13}$$

を満足するように α を選べばよい。

(13) には $\alpha=0$ なる根があるが，これは使用出来ない。又正負の絶対値の等しい根があることも分る。根が無数にあることは

$$y=c_2\tan c_1\alpha a_2, \tag{14}$$

$$y=-c_1\tan c_2\alpha a_1 \tag{15}$$

なる二曲線を画いて，その交点を求めればよい。このようにしてみれば図から根は無根に多くあることが分るであろう。(13) の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを α_s と書くこととする。

このような問題を解くには任意の函数の展開が必要となる。その出し方は著者の前論文から分るので，唯結果だけを記して置く。$f_1(x)$, $f_2(x)$ の展開式は次のようになる：

$$f_1(x)=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin c_1\alpha_s a_2\sin c_2\alpha_s x}{a_1c_2^2\sin^2 c_1\alpha_s a_2+a_2c_1^2\sin^2 c_2\alpha_s a_1}$$
$$\times\left(c_2^2\sin c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos c_1\alpha_s\lambda d\lambda+c_1^2\sin c_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin c_2\alpha_s(a-\lambda)\,d\lambda\right), \tag{16}$$

$$f_2(x)=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin c_2\alpha_s a_1\sin c_1\alpha_s(a-x)}{a_1c_2^2\sin c_1\alpha_s a_2+a_2c_1^2\sin^2 c_2\alpha_1 a_1}$$
$$\times\left(c_2^2\sin c_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin c_1\alpha_s\lambda d\lambda+c_1^2\sin c_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin c_2\alpha_s(a-\lambda)\,d\lambda\right). \tag{17}$$

III. 問題の提起 2

(13) において $c_1a_2=c_2a_1$ である場合には，この式はどうなるか，即ち (11), (12) はどうなるであろうか考えて見よう。この場合には (11), (12) において $\sin c_1\alpha a_2=\sin c_2\alpha a_1$ であるから，これらの式の代りに

$$y_1=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\sin c_2\alpha x \tag{18}$$

$$y_2=(A_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+B_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\sin c_1\alpha(a-x) \tag{19}$$

を用いればよい。

(18), (19) に境界条件 (6) を入れれば，

$$(c_1+c_2)\,\alpha\cos c_2\alpha a_1=0$$

となる。$c_1+c_2>0$, $\alpha\neq 0$ であるから，これから

$$\cos c_2\alpha a_1=0$$

となり，これから

$$\alpha=\frac{(2s+1)\pi}{2c_2a_1}=\frac{(2s+1)\pi}{2c_1a_2}, \qquad [s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots] \tag{20}$$

を得る。(20) により，(18), (19) は，A_α, B_α と代りに A_s, B_s と書き s に就いての和を採れば，次の如くなる：

$$y_1=\sum_{s=0}^{\infty}\left(A_s\cos\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t+B_s\sin\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t\right)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x, \tag{21}$$

$$y_2=\sum_{s=0}^{\infty}\left(A_s\cos\frac{c_2(2s+1)\pi}{2a_2}t+B_s\sin\frac{c_2(2s+1)\pi}{2a_2}t\right)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x). \tag{22}$$

(21), (22) に初期条件を (7), (9) 入れれば,

$$f_1(x)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x,\qquad f_2(x)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x) \qquad (23), (24)$$

となる。初期条件 (8), (10) を入れたものも同様に書くことが出来る。

(23), (24) の右辺の級数を用いて $f_1(x)$, $f_2(x)$ を展開すれば，問題が解けるように思われるが，然しこれらの級数をよく見ると偶函数の性質を有するから，これらを用いる任意の函数を表わすことは出来ない。他に奇函数の性質を有する級数があって，それを合せて用いれば任意の函数を展開し得ると考えられる。その奇函数の性質のある級数を求めなくてはならない。

IV. 問題の解き方 2

この問題を解決するために翻って (11), (12) を考えてみよう。これらの解は境界条件 (5) を満足する解であるが，その代りに境界条件 (6) を満足する解を考えてみよう。それは

$$y_1=(C_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+D_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\,c_1\sin c_2\alpha x \tag{25}$$

$$y_2=-(C_\alpha\cos c_1c_2\alpha t+D_\alpha\sin c_1c_2\alpha t)\,c_2\sin c_1\alpha\,(a-x) \tag{26}$$

に依って与えられる。これに境界条件 (5) を入れれば

$$(c_1-c_2)\sin c_2\alpha a_1=0$$

となり $c_1 \neq c_2$ であるから

$$\sin c_2\alpha a_1=0$$

が得られ，α の値として

$$\alpha=\frac{s\pi}{c_2a_1}=\frac{s\pi}{c_1a_2},\qquad [s=1, 2, 3, \ldots\ldots] \tag{27}$$

が得られる。この値により，C_α, D_α の代りに C_s, D_s と書き和を採れば (25), (26) は次の如くなる:

$$y_1=c_1\sum_{s=1}^{\infty}\left(C_s\cos\frac{c_1s\pi}{a_1}t+D_s\sin\frac{c_1s\pi}{a_1}t\right)\sin\frac{s\pi}{a_1}x, \tag{28}$$

$$y_2=-c_2\sum_{s=1}^{\infty}\left(C_s\cos\frac{c_2s\pi}{a_2}t+D_s\sin\frac{c_2s\pi}{a_2}t\right)\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x). \tag{29}$$

(28), (29) に初期条件 (7), (9) を入れれば,

$$f_1(x)=c_1\sum_{s=1}^{\infty}C_s\sin\frac{s\pi}{a_1}x,\qquad f_2(x)=-c_2\sum_{s=1}^{\infty}D_s\sin\frac{s\pi}{a_1}(a-x) \qquad (30), (31)$$

となる。初期条件 (8), (10) を入れても同様な式が得られる。

(30), (31) の展開式をみると，奇函数の性質をしていて，任意の函数を表わすことは出来ない。(30), (31) が探していた奇函数の性質を有する級数であるということになるのである。

(23) と (30), (24) と (31) の和を用いて $f_1(x)$, $f_2(x)$ を表わさなくてはならないことが分ったのであるから，y_1 と y_2 も (21) と (28), (22) と (29) の和として表わさなくてはならない。即ち y_1, y_2 として次の如き級数を用いることとなる：

$$y_1=\sum_{s=0}^{\infty}\left(A_s\cos\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t+B_s\sin\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t\right)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x$$

$$+c_1\sum_{s=1}^{\infty}\left(C_s\cos\frac{c_1s\pi}{a_1}t+D_s\sin\frac{c_1s\pi}{a_1}t\right)\sin\frac{s\pi}{a_1}x, \tag{32}$$

$$y_2=\sum_{s=0}^{\infty}\left(A_s\cos\frac{c_2(2s+1)\pi}{2a_2}t+B_s\sin\frac{c_2(2s+1)\pi}{2a_2}t\right)\cos\frac{(2s+1)}{2a_2}(a-x)$$

$$-c_2\sum_{s=1}^{\infty}\left(C_s\cos\frac{c_2s\pi}{a_2}t+D_s\sin\frac{c_2s\pi}{a_2}t\right)\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x). \tag{33}$$

これに初期条件 (7), (9) を入れれば，

$$f_1(x)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x+c_1\sum_{s=1}^{\infty}C_s\sin\frac{s\pi}{a_1}x, \tag{34}$$

$$f_2(x)=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x)-c_2\sum_{s=1}^{\infty}C_s\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x) \tag{35}$$

となる。初期条件 (8), (10) に入れた式も同様に得られる。このような展開式が得られれば問題は解かれるのである。

(34), (35) 中の A_n を決定したい場合には (34) に $c_2^2\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2a_1}x$ を掛けて 0 から a_1 まで積分し，(35) に $c_1^2\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)$ を掛けて a_1 から a まで積分して加え合わせるのである：

$$c_2^2\int_0^{a_1}f_1(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx+c_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\left(c_2^2\int_0^{a_1}\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx\right.$$

$$\left.+c_1^2\int_{a_1}^{a}\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx\right)$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}C_s\left(c_1c_2^2\int_0^{a_1}\sin\frac{s\pi}{a_1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx\right.$$

$$-c_1^2 c_2 \int_{a_1}^{a} \sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx\Big)$$

然るに

$$\int_0^{a_1} \sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx=0, \qquad [s \neq n],$$

$$\int_{a_1}^{a} \sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}\,dx=0, \qquad [s \neq n],$$

$$\int_0^{a_1} \sin^2\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x\,dx=\frac{a_1}{2}, \qquad \int_{a_1}^{a} \sin^2\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx=\frac{a_2}{2},$$

$$\int_0^{a_1} \sin\frac{s\pi}{a_1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx=(-1)^{s+n+1}\frac{\dfrac{s\pi}{a_1}}{\left(\dfrac{s\pi}{a_1}\right)^2-\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2a_1}\right)^2},$$

$$\int_{a_1}^{a} \sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx=(-1)^{s+n+1}\frac{\dfrac{s\pi}{a_2}}{\left(\dfrac{s\pi}{a_2}\right)^2-\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2a_2}\right)^2}$$

であるから，

$$c_2^2\int_0^{a_1} \sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx$$

$$+c_1^2\int_{a_1}^{a} \sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)=0, \qquad [s \neq n],$$

$$=\frac{c_2^2 a_1+c_1^2 a_2}{2}=\frac{c_2 a_1(c_1+c_2)}{2}, \qquad [s=n],$$

$$c_1 c_2^2\int_0^{a_1} \sin\frac{s\pi}{a^1}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}x\,dx-c_1^2 c_2\int_{a_1}^{a} \sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-x)\,dx=0$$

となる。従って A_n は次の如く与えられる：

$$A_n=\frac{2}{c_2^2 a_1+c_1^2 a_2}\left(c_2\int_0^{a_1} f_1(\lambda)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_1}\lambda\,d\lambda\right.$$

$$\left.+c_1^2\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a_2}(a-\lambda)\,d\lambda\right). \tag{36}$$

(34), (35) の中の C_n を決定するには (34) に $c_2\sin\dfrac{n\pi}{a_1}x$ を掛けて 0 から a_1 まで積分し (35) に $-c_1\sin\dfrac{n\pi}{a_2}(a-x)$ を掛けて a_1 から a まで積分して加え合わせるのである。前同様の計算により C_n は次のようになる：

$$C_n=\frac{2}{c_1 a_2 a}\left(c_1\int_0^{a_1} f_1(\lambda)\sin\frac{n\pi}{a_1}\lambda\,d\lambda-c_2\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda)\sin\frac{n\pi}{a_1}(a-\lambda)\,d\lambda\right). \tag{37}$$

B_n, D_n も同様な計算によって得られる。このように求められた常数によって，y_1, y_2 を書くことが出来る：

$$y_1=\frac{2}{c_2^2 a_1+c_1^2 a_2}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\cos\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t\left(c_2^2\int_0^{a_1} f_1(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}\lambda\,d\lambda\right.\right.$$

$$
+c_1^2\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-\lambda)\,d\lambda\Big)
$$

$$
+\frac{2a_1}{c_1(2s+1)\pi}\sin\frac{c_1(2s+1)\pi}{2a_1}t\Big(c_2^2\int_0^{a_1}F_1(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a}\lambda d\lambda
$$

$$
+c_1^2\int_{a_1}^{a}F_2(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-\lambda)d\lambda\Big)\Big\}\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}x
$$

$$
+\frac{2}{c_2 a}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\cos\frac{c_1 s\pi}{a_1}t\Big(c_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_1}\lambda d\lambda-c_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-\lambda)\,d\lambda\Big)
$$

$$
-\frac{a_1}{c_1 s\pi}\sin\frac{c_1 s\pi}{a_1}t\Big(c_2\int_0^{a_1}F_1(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_1}\lambda d\lambda-c_1\int_{a_1}^{a}F_2(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-\lambda)d\lambda\Big)\Big\}\sin\frac{s\pi}{a_1}x, \quad (38)
$$

$$
y_2=\frac{2}{c_2^2 a_1+c_1^2 a_2}\sum_{s=0}^{\infty}\Big\{\cos\frac{c_2(2s+1)\pi}{2a_2}t\Big(c_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}\lambda d\lambda
$$

$$
+c_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-\lambda)\,d\lambda\Big)
$$

$$
-\frac{2a_2}{c_2(2s+1)\pi}\sin\frac{c_2(2s+1)\pi t}{2a_2}\Big(c_2^2\int_0^{a_1}F_1(\lambda)\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_1}\lambda d\lambda
$$

$$
+c_1^2\int_{a_1}^{a}F_2(\lambda)\sin\frac{(2s+)1\pi}{2a_2}(a-\lambda)\,d\lambda\Big\}\sin\frac{(2s+1)\pi}{2a_2}(a-x)
$$

$$
+\frac{2}{c_1 a}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\cos\frac{c_2 s\pi}{a_2}t\Big(c_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_1}\lambda d\lambda-c_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_2}\ a-\lambda)\,d\lambda\Big)
$$

$$
+\frac{a_2}{c_2 s\pi}\sin\frac{c_2 s\pi}{a_2}t\Big(c_1\int_0^{a_1}F_1(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_1}\lambda d\lambda
$$

$$
-c_1\int_{a_1}^{a}F_2(\lambda)\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-\lambda)d\lambda\Big)\Big\}\sin\frac{s\pi}{a_2}(a-x) \quad (39)
$$