或る種の時系列に基づく予想推測の仕方についての一提案

佐 藤 良 一 郎

1. 序 言

時間 t の経過に伴って変動する量 U を，或る時点を基点とし，過去または将来に向って一定期間毎に観察して，右下のような数値系列を得たとする。表中 u_i は $t=i$ に対応する U の観測値である。

このとき，平面上に直交軸を定め，横軸の上に t, 縦軸の上に u を対応させて，(i, u_i) を座標とする点をとり，こうしてできた点群の模様が，視察または他の方法によって，例えば二次曲線の周りに散らばっていると見られるならば u と t との間には

（1） $u_t=a_0t^2+a_1t+a_2+\varepsilon$ （ε は偶然量）

なる関係があると仮定し，最小二乗法その他の方法によって，係数 a_0, a_1, a_2 を決定する。そして，この決定された a_0, a_1, a_2 の値を用いて，任意の定期時点 $t=j$（整数）における U の値 u_j は

（2） $u_j=a_0j^2+a_1j+a_2$

で表わされるとし，この値と $t=j$ における実現値 u_j' との喰違いは，標準誤差

（3） $$\left\{\frac{1}{k+l+1}\sum_{j=-k}^{l}(u_j'-a_0j^2-a_1j-a_2)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

で表わす。以上が通常よく用いられているところの方法であり，考え方である。

t	u
$-k$	u_{-k}
$-k+1$	u_{-k+1}
…	…
…	…
-1	u_{-1}
0	u_0
1	u_1
…	…
…	…
l	u_l

第 1 図

ところで，上の場合，点群が暗示する曲線の方程式の次数を視察によって定めるというのでは，恣意性の潜入する危険が大きい。そこで，これを避けるため，定差法を用いて，適合するところの次数を決定することが行なわれている。ところが，その際，定差をどの次数までとればよいかという問題が起る。然るにこの点について明確に論じたものが，ちょっと筆者には見当らない。

そこで，この問題について一つの解答を与え，かつ，上述のような時系列を扱うときの新しい考え方と方法を提案しようと思う。

2. 本論文のねらい

本論文で展開しようとするのは，t の多項式と偶然量との和として表現されそうな時系列に対して

i) あらかじめ特定の型の多項式や多項式の次数を仮定することなく，また

ii) 最小二乗法を用いることなく，しかも

iii) 数理統計学的に合理的な

方法並に原理である。

一般性を失うおそれはないので，簡単な場合をとりあげて，方法並に原理の要点を説述する。一般の場合は後に附記する。

3. 方法及び原理の要点

今，$t=0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ に対応する U の値 $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ が実際に観測されて，既に知られているものとする。そして，逐次定差 $\Delta u_t=u_{t+1}-u_t$, $\Delta^2 u_t=\Delta u_{t+1}-\Delta u_t$, ……が計算されて，次のような定差表が或る階までできあがったとする。

t	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	…
0	u_0				
		Δu_0			
1	u_1		$\Delta^2 u_0$		
		Δu_1		$\Delta^3 u_0$	
2	u_2		$\Delta^2 u_1$		…
		Δu_2		$\Delta^3 u_1$	
3	u_3		$\Delta^2 u_2$		…
		Δu_3		$\Delta^3 u_2$	
4	u_4		$\Delta^2 u_3$		…
		Δu_4		…	
5	u_5		…		…
		…		…	
…	…		…		…
		…		…	
…	…		…		…
		…		…	
…	…		…		
		Δu_{n-2}		$\Delta^3 u_{n-3}$	
$n-1$	u_{n-1}		$\Delta^2 u_{n-2}$		
		Δu_{n-1}			
n	u_n				

第 2 図

このとき，若し例えば $\Delta^3 u$ の欄に到ってはじめて欄内の数値に，正負があり，零または零に近いもの，零に遠いものがあって，しかも符号並に大きさの配列に乱雑 (Randomness)が認められ，かつ，数値の個数も少くない (少くとも 10 を以て数える程度) のみならず，その変動の幅 (Range) が，すぐ次の定差 $\Delta^4 u$ の欄内における変動の幅の $\frac{1}{2}$ 程度であることを認めたとする。そうしたならば，$\Delta^3 u$ 及び $\Delta^2 u$ の欄における数値の分散を計算する。記述の便宜のために，$\Delta^r u$ に対応する分散を S_r^2 で記すことにする。

前述の場合，

I〕 若し

$$(4) \qquad 2S_2^2 \fallingdotseq S_3^2 \quad \text{または} \quad 2S_2^2 < S_3^2$$

が成立つならば，任意の整数値 t に対して

$$(5) \qquad \Delta^2 u_t = A + \varepsilon_t$$

が成立つものと仮定する。ただし，A は定数，ε_t はどれも一つの確率変数（偶然量といってもよい）であって，各 ε_t は他と互に独立で，零を平均とし，共通の標準偏差 σ を以って分布するものとする。

II〕 若し上の条件 4) が成立しないならば，$\Delta^5 u$ のすぐ次の定差 $\Delta^6 u$ の欄内における数値の分散 S_6^2 を計算する。そして

(6) $$2S_5^2 \fallingdotseq S_6^2 \quad \text{または} \quad 2S_5^2 < S_6^2$$

が成立つならば

(7) $$\Delta^5 u_t = A + \varepsilon_t$$

が成立つものと仮定する。ただし A, ε_t は前段と同様の意味を表わす。

III〕 上の二つの場合の何れの条件も成立しないときには，ここに提案する方法は適用できない。

上には，記述の便宜上，格段な定差について示したのであるが，用いている考えは一般化できるのである。即ち

I〕 $\Delta^r u$ の欄に到ってはじめて，数値の大きさ並に符号の配列に乱雑が認められ

(8) $$2S_{r-1}^2 \fallingdotseq S_r^2 \quad \text{または} \quad 2S_{r-1}^2 < S_r^2$$

が成立つならば，整数値 t の何れに対しても

(9) $$\Delta^{r-1} u_t = A + \varepsilon_t$$

が成立つものと仮定する。

II〕 上の場合，(8) が成立たないが

(10) $$2S_r^2 \fallingdotseq S_{r+1}^2 \quad \text{または} \quad 2S_r^2 < S_{r+1}^2$$

が成立つならば

(11) $$\Delta^r u_t = A + \varepsilon_t$$

が成立つものと仮定する。

ただし，上の何れの場合においても，A, ε_t に与える意味は前と同様である。

(8) のときに (9)，(10) のときに (11) を仮定するのは，例えば，(9) を仮定すると

$$\Delta^r u_t = \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t$$

となり，ε_t と ε_{t+1} が互に独立であることから，$\Delta^r u_t$ の分散は，ε_t の分散の2倍，従って，$\Delta^{r-1} u_t = A + \varepsilon_t$ の分散の2倍となることによる*。(10) のとき (11) を仮定する理由も上と同様である。

U の t における値が

(12) $$u_t = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots\cdots + a_m + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ は偶然量})$$

で表わされるとき，U には t に関する m 次多項式で表わされるところの趨勢 (Trend) があるという。この述べ方を踏襲するならば，筆者の考えは，U そのものの有する趨勢に眼をつけるのではなくて，U の時系列における或る階数の定差における趨勢 (実は定数で表わされる) に眼をつけ，これに対して合理的な仮定を設け，それによって，U の t に伴う変動を記述し，かつ，これによって将来の値を予想し，あるいは過去の値を推測しようというにある。

4. 注　意

ついでに一言すると，U の時系列 ……, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, ……, u_n, …… に適合する多項式 (t についての) があるかどうか，あれば その次数は何かということを見定め

---

* 互に独立な n 個の確率変数 X_1, X_2, ……, X_n が，何れも零を平均とし，σ^2 を分散とするならば，$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ の分散は $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\sigma^2$ に等しいことによる。

るには，前述の仕方によって，(8) あるいは (10) に到達するかどうかをしらべ，若しこれに到達したならば，それに対応する仮定において ε_t を零とおく，そうすると，(8) のときには所要の多項式は $r-1$ 次，(10) のときには r 次であるとされる。というのは，多項式 $f(x)$ について $\Delta^n f(x)=A$ (定数) が成立つときは，$f(x)$ は x についての n 次多項式であるからである。

それでは，何故，(9) あるいは (11) を仮定するだけに止めて，

(13) $$u_t=a_0t^{r-1}+a_1t^{r-2}+\cdots\cdots+a_{r-1}+\varepsilon$$

あるいは

(14) $$u_t=a_0t^r+a_1t^{r-1}+\cdots\cdots+a_r+\varepsilon$$

のような仮定をしないのか。

大体，時系列の問題の主眼とするところは，与えられた数列（時間の順に並んだ）に基づいて将来の値を予想するとか，過去の値を推測することにある。ところで，若しこのことを，事象の本質をつきとめた上でしようとするならば，単純に上述のようなことをしただけでは，何れの場合にも満足なものとはいえないであろう。(9) あるいは (11) を仮定するのも，(13) あるいは (14) のような仮定をするのも，合理的ではあるが実験的なものであるに過ぎない。従って，どの仮定を採用しようと理論的には甲乙はない。ただ，(9) あるいは (11) のような仮定をすると，下に述べるように，最小二乗法を用いることなく，しかも，最小二乗法によるよりも単純な手続きで，U の将来値あるいは過去の値が求められる，という利点がある。また，各期の U の値には，期を経るに従って偶然量が積み重なって加わってくる（このことは後に述べることで次第にわかる）という考え方の方が，U の性質によっては他の考え方よりも合理的であると思われる。以上が，(9) あるいは (11) のような仮定を採用する所以である。

U の将来値あるいは過去の値をどのようにして予想あるいは推測するかの手続きは，後に詳述するが，その要点は次の通りである。

$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ を既に得ている観測値とするならば，U の将来値 u_{n+j} (j は正の整数) の予想値 $\hat{u}_{n+j}$ は

I〕 $\Delta^{r-1}u_t=A+\varepsilon_t$ を仮定するときは，既知の値 $u_n, \Delta u_{n-1}, \Delta^2u_{n-2}, \ldots\ldots, \Delta^{r-2}u_{n-r+2}$ と

$$\overline{\Delta^{r-1}u}=\frac{1}{n-r+2}\sum_{t=0}^{n-r+1}\Delta^{r-1}u_t$$

とを用いて，簡単に計算される。そして，その標準誤差の評価も容易にできる。

II〕 $\Delta^r u_t=A+\varepsilon_t$ を仮定するときは，既知の値 $u_n, \Delta u_{n-1}, \Delta^2u_{n-2}, \ldots\ldots, \Delta^{r-1}u_{n-r+1}$ と

$$\overline{\Delta^r u}=\frac{1}{n-r+1}\sum_{t=0}^{n-r}\Delta^r u_t$$

とを用いて簡単に計算され，その標準誤差の評価も容易にできる。

また，U の過去の値 u_{-j} (j は正整数) の推定値 $\hat{u}_{-j}$ は，

III〕 $\Delta^{r-1}u_t=A+\varepsilon_t$ を仮定するときは，既知の値 $u_0, \Delta u_0, \Delta^2u_0, \ldots\ldots, \Delta^{r-2}u_0$ と

$$\overline{\Delta^{r-1}u}=\frac{1}{n-r+2}\sum_{t=0}^{n-r+1}\Delta^{r-1}u_t$$

とを用いて計算され，その標準誤差の評価も前と同様にしてできる。

IV〕 $\Delta^r u_t = A + \varepsilon_t$ と仮定するときは，III〕における，$r-1$ を r でおきかえればよい。

もっとも，上の仕方だけが U の将来値及び過去の値を予想推測する仕方ではない。例えば，$\Delta^r u_t = A + \varepsilon_t$ を仮定するとき

$$u_n,\ \Delta u_{n-1},\ \Delta^2 u_{n-2},\ \ldots\ldots,\ \Delta^{r-1} u_{n-r+1}$$

や

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^{r-1} u_0$$

を用いないで，

$$u_k,\ u_{k-1},\ \ldots\ldots,\ u_{k-r+1} \qquad (r-1 \leqq k \leqq n)$$

を用いて，U の将来値の予想値及び過去の値の推測値を計算することができる。その公式は後に示すであろう。

5. 将来値の予想の仕方

記述を簡単にし，かつ，方法の要点をわかり易くするために，仮定

$$\Delta^2 u_t = A + \varepsilon_t \tag{5}$$

の下で，$t=n+j$ における U の値 u_{n+j} の予想値 $\hat{u}_{n+j}$ を求める仕方を説明する。

(5) の仮定を許すと，任意の正の整数 k に対して

$$\Delta^2 u_k = A + \varepsilon_k$$

であることはいうまでもないが，$t=n$ に対応する $\Delta^2 u$ は $\Delta^2 u_{n-2}$ であるということにすれば，$t=n+l$ (l は正の整数) に対応する $\Delta^2 u$ は $\Delta^2 u_{n+l-2}$ で表わされるから

$$\Delta^2 u_{n+l-2} = A + \varepsilon_l \qquad l=1,\ 2,\ \ldots\ldots \tag{15}$$

と書くことができよう。

それから，$t=n+l$ に対応する Δu は，上に準ずると，Δu_{n+l-1} で表わされる。それで (15) により

$$\Delta u_{n+l-1} - \Delta u_{n+l-2} = \Delta^2 u_{n+l-2} = A + \varepsilon_l$$
$$\Delta u_{n+l-2} - \Delta u_{n+l-3} = A + \varepsilon_{l-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta u_{n-2} - \Delta u_{n-1} = A + \varepsilon_1$$

故に，任意の正の整数 l に対して

$$\Delta u_{n+l-1} = \Delta u_{n-1} + lA + \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i \tag{16}$$

次に，

$$u_{n+j} \quad - u_{n+j-1} = \Delta u_{n+j-1}$$
$$u_{n+j-1} - u_{n+j-2} = \Delta u_{n+j-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+1} - u_n = \Delta u_n$$

によって

$$u_{n+j} = u_n + \sum_{l=1}^{j} \Delta u_{n+j-l} \tag{17}$$

を得るので，これに (16) を代入すると

(18) $$u_{n+j}=u_n+j\Delta u_{n-1}+\sum_{l=1}^{j} lA+\sum_{l=1}^{j}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i$$
$$=u_n+j\Delta u_{n-1}+\frac{1}{2}j(j+1)A+\{j\varepsilon_1+(j-1)\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_j\}$$

(18) において，j を t と書換えてみると

$$u_{n+t}=u_n+t\Delta u_{n-1}+\frac{1}{2}t(t+1)A+\{t\varepsilon_1+(t-1)\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_t\}$$

となる。即ち，$\Delta^2 u_t=A+\varepsilon_t$ と仮定し，かつ u_n, Δu_{n-1} を既知の量とすることは，U の将来値 u_{n+t} は，t の二次函数と，{ } 内の式で表わされるような確率変数 ε_i を係数とする t の一次結合との和から成るものと仮定することである，といえる。もっとも，u_n, Δu_{n-1} を既知の量とすることは，u_n, u_{n-1} を既知の量とすることであるから，前者の代りに後者を置換えて言い換えることもできる。

ところで，(18) において A は未知の定数であり，ε_t は零を平均とし未知定数 σ を標準偏差として互に独立に分布するということが仮定で知られているだけであるから，A の値及び σ または σ^2 の値を推定しなければならない。どのようにして推定するか。その仕方を次に述べよう。

6. 定数及び分散の推定

第5節の場合における A の値及び σ^2 の値の推定の仕方について述べれば，一般の場合にもそれを拡張して使うことができるので，

(5) $$\Delta^2 u_t=A+\varepsilon_t$$

の仮定の下で問題の解き方を示そう。

仮定 (5) の下では，第2図に示す $\Delta^2 u$ の欄内の数値は

$$\Delta^2 u_0=A+e_0,\quad \Delta^2 u_1=A+e_1,\quad \ldots\ldots,\quad \Delta^2 u_{n-2}=A+e_{n-2}$$

と書くことができよう。e_0, e_1, ……, e_{n-2} は未知ではあるが，それぞれ ε_0; ε_1, ……, ε_{n-2} の実現値である。

それで，$\Delta^2 u$ の欄内における数値の平均を $\overline{\Delta^2 u}$ で表わせば

(19) $$\overline{\Delta^2 u}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}\Delta^2 u_i=A+\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}e_i=A+\bar{e}$$

ただし $$\bar{e}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}e_i$$

を得る。

また，$\Delta^2 u$ の分散を既述の通り $S_2{}^2$ で表わせば

(20) $$S_2{}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}(\Delta^2 u_i-\overline{\Delta^2 u})^2$$
$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}(e_i-\bar{e})^2$$

を得る。

ε_t は零を平均とするし，n は実際の場合には大きいのが常であるから，ε_t の実現値 e_t の平均 $\bar{e}$ は零に近いものと期待される。それで，(19) により

(21) $$A \text{ の推定値} = \overline{\Delta^2 u}$$

としてよい。また，ε_t は互に独立で分散 σ^2 を共有するから (20) により

(22) $$\sigma \text{ の推定値} = S_2$$

としてよいであろう。

$\bar{e}$ の標準誤差は，σ が既知のときは $\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sigma$ であるが，σ は未知であるから，$\frac{1}{\sqrt{n-1}}S_2$ で近似できるものとせねばならない。そうすると，A の近似値として $\overline{\Delta^2 u}$ を用いるとき，それに伴う標準誤差は，近似的に $\frac{1}{\sqrt{n-1}}S_2$ に等しいということになる。即ち

(23) $$A = \overline{\Delta^2 u} \pm \frac{1}{\sqrt{n-1}}S_2$$

さて，(18) で表わされる u_{n+j} の期待値を $E(u_{n+j})$，分散を $\mathrm{Var}(u_{n+j})$ で表わすと

(24) $$E(u_{n+j}) = u_n + j\Delta u_{n-1} + \frac{1}{2}j(j+1)A$$

(25) $$\mathrm{Var}(u_{n+j}) = \{j^2 + (j-1)^2 + \cdots\cdots + 2^2 + 1^2\}\sigma^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}\sigma^2$$

と計算されるので，$t=n+j$ における U の予想値を $\hat{u}_{n+j}$ で表わすと，(24), (21) により

(26) $$\hat{u}_{n+j} = u_n + j\Delta u_{n-1} + \frac{1}{2}j(j+1)\overline{\Delta^2 u}$$

となる。

そして，この予想値と実現値との喰違いを標準誤差 ($S.E.$ と略記しよう) で表わすならば

(27) $$S.E. = \frac{1}{2}j(j+1)\frac{1}{\sqrt{n-1}}S_2 + \sqrt{\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}}\,S_2$$

となる。(27) の右辺における第1項は A の代りに $\overline{\Delta^2 u}$ を用いることによって生ずる誤差，第2項は $\mathrm{Var}(u_{n+j})$ の近似値である。後者は $\{j\varepsilon_1 + (j-1)\varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_j\}$ の実現値を無視することによって生ずる誤差と解することができる。

再三述べる通り，上来述べて来たことは容易に一般化することができる。そして，後に一般的な結果を示すつもりでもある。しかし数値例で説明するときの必要上，

(28) $$\Delta u_t = A + \varepsilon_t$$

を仮定したときにおける u_{n+j} 及び $\hat{u}_{n+j}$ を次に示そう。

(17) において，$\Delta u_{n+j-l} = A + \varepsilon_{j-l}$ とおけば，容易に

(29) $$u_{n+j} = u_n + jA + \sum_{l=1}^{j}\varepsilon_{j-l}$$

が得られる。それで

(30) $$\hat{u}_{n+j} = u_n + j\overline{\Delta u}$$

(31) $$S.E. = \left(\frac{j}{\sqrt{n}} + \sqrt{j}\right)S_1$$

を得る。

7. 過去の値の推定

例えば，(5) の仮定，すなわち

(5) $$\Delta^2 u_t = A + \varepsilon_t$$

を許した場合，$t=-j$ (j は正の整数) における U の値 u_{-j} を推定するには，任意の正整数に対して

(32) $$\Delta^2 u_{-k} = \Delta u_{-k+1} - \Delta u_{-k} = A + \varepsilon_{-k}$$
$$\Delta u_{-k} = u_{-k+1} - u_{-k}$$

であることに着目する。これによると

(33) $$u_{-j} = u_0 - j\Delta u_0 + \frac{1}{2} j(j+1)A + \sum_{i=1}^{j}\sum_{l=1}^{i} \varepsilon_{-l}$$

となることが容易にわかるから，前節におけると同様にして，

(34) $$\hat{u}_{-j} = u_0 - j\Delta u_0 + \frac{1}{2} j(j+1)\overline{\Delta^2 u}$$

を得る。これが，既知の値 u_0，Δu_0 を用いたときの u_{-j} の推定値である。

(34) による推定値の標準誤差 S. E. は，前節にけると同様に

(35) $$\mathrm{S.\,E.} = \left\{ \frac{j(j+1)}{2\sqrt{n-1}} + \sqrt{\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}} \right\} S_2$$

で与えられる。

若し (28) の仮定，すなわち

(28) $$\Delta u_t = A + \varepsilon_t$$

を許すならば，

(29) $$u_{-j} = u_0 - jA - \sum_{t=1}^{j} \varepsilon_{-t}$$

となり，従って

(30) $$\hat{u}_{-j} = u_0 - j\overline{\Delta u}$$

(31) $$\mathrm{S.E.} = \left(\frac{j}{\sqrt{n}} + \sqrt{j} \right) S_1$$

となる。

8. 実　例 (1)

次に示すのは，わが国の累年出生数 U に対する定差表である。前述の手法を実際問題に適用する仕方の説明を主眼とするので，便宜上，明治 20 年以降大正 5 年までの数値 (千人を単位とする) に基づいて作製した。

第 1 表

わ が 国 累 年 出 生 数

（森数樹著：人口統計論からとる）

年次	t	出生数（千人） u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
明治 20	0	1,058			
			115		
21	1	1,173		−78	
			37		−24
22	2	1,210		−102	
			−65		109
23	3	1,145		7	
			−58		171
24	4	1,087		178	
			120		−327
25	5	1,207		−149	
			−29		209
26	6	1,178		60	
			31		−54
27	7	1,209		6	
			37		−7
28	8	1,246		−1	
			36		17
29	9	1,282		16	
			52		−32
30	10	1,334		−16	
			36		−3
31	11	1,370		−19	
			17		36
32	12	1,387		17	
			34		30
33	13	1,421		47	
			81		−119
34	14	1,502		−72	
			9		42
35	15	1,511		−30	
			−21		1
36	16	1,490		−29	
			−50		92
37	17	1,440		63	
			13		−135
38	18	1,453		−72	
			−59		351
39	19	1,394		279	
			220		−450
40	20	1,614		−171	
			49		153
41	21	1,663		−18	
			31		6
42	22	1,694		−12	
			19		28
43	23	1,713		16	
			35		−61
44	24	1,748		−45	
			−10		74
大正 1	25	1,738		29	
			19		3
2	26	1,757		32	
			51		−92
3	27	1,808		−60	
			−9		75
4	28	1,799		15	
			6		
5	29	1,805			

第1表を観察すると，$\Delta^2 u$ の欄においてはじめて，符号並に値の大きさの並び方に乱雑が見られる。そこで，Δu の欄について分散 S_1^2 を計算し，$\Delta^2 u$ の欄について S_2^2 を計算してみる。

(32) $$S_1^2=3,345.27 \quad (S_1=57.84)$$
$$S_2^2=7,450.17 \quad (S_2=86.31)$$

と計算されるので

$$2S_1^2 \fallingdotseq S_2^2 \quad \text{または} \quad 2S_1^2 < S_2^2$$

が成立っている。そこで

$$\Delta u_t = A + \varepsilon_t$$

と仮定する。A，ε_t はこれまでと同様の意味を有するものとする。

そうすると

(33) $$A \text{ の推定値}=\overline{\Delta u}=25.76$$

(この値は，S_1^2 を計算する際それに先だっ計算されてる)。

本例においては，$n=29$ であるから，U の将来値は $u_{n+j}=u_{29+j}$ $(j \geqq 1)$ で記されるが

(34) $$u_{29+j}=u_{29}+jA+\sum_{t=1}^{j}\varepsilon_t$$

となるので，予想値は

(35) $$\hat{u}_{29+j}=u_{29}+j\overline{\Delta u}=1,805+25.76j$$

で表わされる。そして，この予想値のもつ標準誤差 S.E. は

A の代りに $\overline{\Delta u}=25.76$ を用いることによって生ずる誤差

$$j\times\frac{S_1}{\sqrt{29}}=57.84\times\frac{j}{\sqrt{29}}$$

と

$\sum_{t=1}^{j}\varepsilon_t$ の実現値を無視することによって生ずる誤差

$$\sqrt{j}\ S_1=57.84\sqrt{j}$$

との和に等しい。即ち

(36) $$\text{S.E.}=57.84\left(\frac{j}{\sqrt{29}}+\sqrt{j}\right)$$

試みに，$j=1, 2, 3, 4$ について，u_{29+j} 及び S.E. を計算すると次のようになる。参考のために，現実の値を（　）内に記して掲げておく。

$u_{29+1}=1,831$ 　S.E.$=68.58$
(1,812)

$u_{29+2}=1,857$ 　S.E.$=103.27$
(1,792)

$u_{29+3}=1,882$ 　S.E.$=132.40$
(1,779)

$u_{29+4}=1,908$ 　S.E.$=158.64$
(2,026)

どの予想値も，実際的見地からは，現実値とよく合っていると見てよいであろう。

次に，$j=1, 2, 3, 4$ に対する U の値の推測値 (明治 19, 18, 17, 16 年の出生数の推定値) u_{-j} 及びその S.E. を (30), (31) によって計算してみると，下のようになる。

$$n=29 \quad u_0=1{,}058 \quad \overline{\varDelta u}=25.76 \quad S_1=57.84$$

であるから

(37) $$\hat{u}_{-j}=1{,}058-25.76j$$

(38) $$\text{S.E.}=\left(\frac{j}{\sqrt{29}}+\sqrt{j}\right)\times 57.84$$

故に

$u_{-1}=1{,}032$ (1,051) S.E. $=68.58$

$u_{-2}=1{,}006$ (1,025) S.E. $=103.27$

$u_{-3}=981$ (975) S.E. $=103.27$

$u_{-4}=955$ (1,005) S.E. $=158.64$

上の (　) 内の数値は，それぞれの年の現実の数値である。どの数値も実際的見地からいって現実の値とよく合っているといってよかろう。

上述のような訳で，(35), (37) は出生数の将来値及び過去の値を予想推測するのに役立つといってよかろう。

いうまでもなく，時点が $t=0$ または n から遠ざかるに従って S.E. が大きくなるので，「$\hat{u}_{-j}$ と u_{-j} との喰違いや，$\hat{u}_{n+j}$ と u_{n+j} との喰違いが，それに対応する S.E. の範囲にあるから，予想推測と実際とがよく合っている」といっても，実用的には無意味なことがあろう。しかし，これは，実験的な式によって取扱う限り，現実の問題ではやむをえないところである。いな，むしろそれが当然かも知れない。

9. 実　例 (その 2)

次に掲げるのは，昭和 21 年 3 月から昭和 22 年 4 月までの間における全国自由預金高 (単位は百万円) の旬次変化の統計に基づく定差表である*。

この表を観察すると，$\varDelta^2 u$ の欄に到ってはじめて符号の配列並に値の大きさの配列に乱雑が見られる。そして

$\varDelta u$ における変動の幅 $=2{,}594-261=2{,}378$

$\varDelta^2 u$ における変動の幅 $=1{,}163-(-845)=2{,}008$

$\varDelta^3 u$ における変動の幅 $=1{,}479-(-1{,}903)=3{,}382$

であるから，$\varDelta u$ の欄における分散 S_1^2 と $\varDelta^2 u$ の欄における分散 S_2^2 との間に

$$2S_1^2 \fallingdotseq S_2^2 \quad \text{または} \quad 2S_1^2 < S_2^2$$

が成立しないであろうということは，実際に S_1^2, S_2^2 を計算しなくとも察するに難くない。

---

* 本論文の基本的な考え方は，昭和 22 年 4 月，当時の大蔵省調査部のために預金高とか手形交換高といったようなものの予想を行なった時に用いたのである。ここに示す実例はその時の資料と結果であって，二，三の席で口演したことがあるが，活字にするのは今度がはじめてである。

第 2 表

全 国 自 由 預 金 高 （単位百万円）

昭和21年3月から昭和22年4月まで

旬	t	u	Δu	Δ²u	Δ³u
昭 21, 3, 上	0	578			
			377		
中	1	955		357	
			734		−685
下	2	1,689		−328	
			406		512
4, 上	3	2,095		184	
			590		−486
中	4	2,685		−302	
			288		937
下	5	2,973		635	
			923		−497
5, 上	6	3,896		138	
			1,061		−983
中	7	4,957		−845	
			216		1,425
下	8	5,173		580	
			796		−786
6, 上	9	5,969		−206	
			590		67
中	10	6,559		−139	
			451		627
下	11	7,010		488	
			939		−657
7, 上	12	7,949		−169	
			770		−70
中	13	8,719		−239	
			532		82
下	14	9,251		−157	
			375		809
8, 上	15	9,626		652	
			1,027		−665
中	16	10,653		−13	
			1,014		50
下	17	11,667		37	
			1,051		325
9, 上	18	12,718		362	
			1,413		−597
中	19	14,131		−235	
			1,178		468
下	20	15,309		233	
			1,411		−444
10, 上	21	16,720		−211	
			1,200		745
中	22	17,920		534	
			1,734		−1,095
下	23	19,654		−561	
			1,173		861
11, 上	24	20,827		300	
			1,473		−894
中	25	22,300		−594	
			879		859
下	26	23,179		265	
			1,144		−185
12, 上	27	24,323		80	
			1,224		520
中	28	25,547		600	
			1,824		−600
下	29	*27,371		0	
			1,824		−436
昭 22, 1, 上	30	29,195		−436	
			1,391		584
中	31	30,586		148	
			1,539		−564
下	32	32,125		−316	
			1,223		1,479
2, 上	33	33,348		1,163	
			2,386		−1,903
中	34	35,734		−740	
			1,646		569
下	35	37,380		−171	
			1,475		1,287
3, 上	36	38,855		1,116	
			2,591		−1,113
中	37	41,446		3	
			2,594		−4
下	38	*44,040		−1	
			2,593		
4, 上	39	46,633			
中	40	(49,284)	(S.E.= 522)	**48,583**	
下	41	(51,994)	(S.E.=1,215)	**51,502**	
5, 上	42	(54,761)	(S.E.=2,121)	**51,733**	
中	43	(57,585)	(S.E.=3,194)	**54,992**	
下	44	(60,471)	(S.E.=4,431)	**58,173**	
6, 上	45	(63,413)	(S.E.=5,789)	**62,998**	

表中 * 印の数字はその前後の数値の平均である。実際の数字は初のは 29232, 後のは 47291 であった。しかし，わが国の十二月下旬，三月下旬という特殊の事情を考慮して，上のような手を加えた。

u 欄の（ ）内の数値は，対応する旬の予想値であり，各予想値に対応する現実の値は その右の方に太字で示してある。

(このような簡便法を利用することは，仕事の能率をあげる上に大切である)

そこで，$\Delta^2 u$ 及び $\Delta^3 u$ における平均 $\overline{\Delta^2 u}$, $\overline{\Delta^3 u}$ 及び分散 S_2^2, S_3^2 を計算してみる。

$$\overline{\Delta^2 u}=58.21 \qquad \overline{\Delta^3 u}=9.68$$

$$S_2^2=202{,}447.7378 \qquad S_2=449.94$$

$$S_3^2=624{,}221.703 \qquad S_3=780.06$$

となるので，

$$\Delta^2 u_t=A+\varepsilon_t$$

と仮定する。

このように仮定すると

$$A \text{ の推定値}=\overline{\Delta^2 u}=58.21$$

$$\sigma \text{ の推定値}=S_2=449.94$$

としてよいから

$$\hat{u}_{n+j}=u_n+j\Delta u_{n-1}+\frac{1}{2}j(j+1)\overline{\Delta^2 u} \tag{26}$$

を適用すると，昭和22年4月中旬以降の毎旬末預金高の予想値は，次の式で与えられる。

$$n=39 \qquad u_{39}=46{,}633 \qquad \Delta u_{38}=2{,}593$$

であるから

$$\hat{u}_{39+j}=46{,}633+2{,}593j+58.21\times\frac{j(j+1)}{2} \tag{27}$$

$$\text{S.E.}=449.94\left\{\frac{j(j+1)}{2\sqrt{38}}+\sqrt{\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}}\right\} \tag{28}$$

$j=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対応する $\hat{u}_{39+j}$ 及び S.E. を算出すると，前掲の定差表の末尾における（　）内の数のようになる。これらの時点における現実の値（表中，太字で示してある）とを比べてみると，1 例だけが（予想値 ±S.E.）の範囲を僅かに逸脱しているだけなので，(27) を預金高の予想に用いることは不当でなかろう。もっとも，予想値と現実値との間の相対誤差を計算してみると，どの時点の予想値も，現実の値とよく合っている（実際的見地から）と見られよう。けれども，本論文の提案する方法の一つの主眼は，予想値を求めるだけでなくて，予想値に伴う標準誤差を明示し，それによって予想値と現実の値との喰違いをあらかじめ知るところにある。

10. 基準にとる時点

将来値を予想するのに，上では，例えば

$$\Delta^2 u_t=A+\varepsilon_t$$

が仮定されるときには，

$$u_n, \qquad \Delta u_{n-1}$$

即ち，$t=n$ 及び $t=n-1$ に対応する観測値 u_n, u_{n-1} を基にして，$t=n+j$ $(j\geqq 1)$ に対する U の値を表わし，過去の値を推定するのに，

$$u_0, \qquad \Delta u_0$$

即ち，$t=0$ 及び $t=1$ に対応する観測値 u_0, u_1 を基にして，$t=-j$ $(j\geqq 1)$ に対する U の値を表わし，それから $\hat{u}_{n+j}$ 及び $\hat{u}_{-j}$ を導いた。こうすると，他の時点に対応する U

の値を用いるよりも，予想値または推定値に随伴する標準誤差 S.E. が小さくなるからである。

ところで，上の場合，若しわれわれが，予想推測の目的と併せて既有の時系列（実際の観測値から成る）を記述するという目的を達しようと欲するならば，

(a) $u_k,\quad \Delta u_{k-1}\quad (1\leqq k\leqq n)$

を基にして u_{k+j}（j は任意の整数）を表わすことができるし，また

(b) $u_k,\quad \Delta u_k\quad (0\leqq k\leqq n-1)$

を基にして u_{k+j} を表わすことができるということに注意すればよい。

(a) の場合の u_{k+j} は，次のようになる。

i) $j\geqq 1$ とすると

$$u_{k+j}=u_k+\sum_{i=0}^{j-1}\Delta u_{k+i}$$

$$\Delta u_{k+i}=\Delta u_{k-1}+\sum_{l=0}^{i}\Delta^2 u_{k-1+l}$$

であること，及び

$$\Delta^2 u_{k-1+l}=A+\varepsilon_l$$

と書いてよいことに着目すれば

(29) $$u_{k+j}=u_k+j\Delta u_{k-1}+\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{l=0}^{i}(A+\varepsilon_l)$$

を得，同様にして

(30) $$u_{k-j}=u_k-j\Delta u_{k-1}+\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{l-0}^{i}(A+\varepsilon_l)$$

を得る。

それで，$j\geqq 1$ に対して

(31) $$\begin{cases}\hat{u}_{k+j}=u_k+j\Delta u_{k-1}+\dfrac{1}{2}j(j+1)\overline{\Delta^2 u}\\[2mm] \hat{u}_{k-j}=u_k-j\Delta u_{k-1}+\dfrac{1}{2}j(j+1)\overline{\Delta^2 u}\end{cases}$$

(32) $$\mathrm{S.E}=\left\{\frac{j(j+1)}{2\sqrt{n-1}}+\sqrt{\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}}\right\}S_2$$

が，所要の式である。

(b) の場合の u_{k+j} は，$j\geqq 1$ とすると

$$u_{k+j}=u_k+\sum_{i=0}^{j-1}\Delta u_{k+i}$$

$$\Delta u_{k+i}=\Delta u_k+\sum_{l=0}^{i-1}\Delta^2 u_{k+l}\qquad (i\geqq 1)$$

であることに注意すると，(a) の場合と同様にして

(33)
$$u_{k+j}=u_k+j\Delta u_k+\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{i-1}(A+\varepsilon_l)$$

を得，また

$$u_{k-j}=u_k-\sum_{i=1}^{j}\Delta u_{k-i}$$

$$\Delta u_{k-i}=\Delta u_k-\sum_{l=1}^{i}\Delta^2 u_{k-l}$$

に注意すると

(34)
$$u_{k-j}=u_k-j\Delta u_k+\sum_{i=1}^{j}\sum_{l=1}^{i}(A+\varepsilon_l)$$

を得る。それで，$j\geqq 1$ に対して

(35)
$$\begin{cases} \hat{u}_{k+j}=u_k+j\Delta u_k+\dfrac{1}{2}j(j-1)\overline{\Delta^2 u} \\ \text{S.E.}=\left\{\dfrac{j(j-1)}{2\sqrt{n-1}}+\sqrt{\dfrac{(j-1)j(2j-1)}{6}}\right\}S_2 \end{cases}$$

(36)
$$\begin{cases} \hat{u}_{k-j}=u_k-j\Delta u_k+\dfrac{1}{2}j(j+1)\overline{\Delta^2 u} \\ \text{S.E.}=\left\{\dfrac{j(j+1)}{2\sqrt{n-1}}+\sqrt{\dfrac{j(j+1)(2j+1)}{6}}\right\}S_2 \end{cases}$$

を得る。

いうまでもなく，(31) を用いれば，u_0, u_1, ……, u_n の中から u_{k-1}, u_k ($k\geqq 1$) を除いた他の値がたとい消え去っても，u_k, Δu_{k-1} 即ち u_{k-1}, u_k の二つと，$\Delta^2 u_t=A+\varepsilon_t$ によって，その近似値が求められる。また，(35), (36) を用いれば，u_k, u_{k+1} ($k\geqq 0$) を除いた他の値が消え去っても，その近似値が求められる。そして，何れの場合にも，将来の値を予想することができ，過去の値を推測することができる。

以上で，筆者の提案する方法の原理並に手法の骨子は述べ尽した。$r>2$ のとき

$$\Delta^r u_t=A+\varepsilon_t$$

なる仮定の下で，u_{n+j} を表わす式が必要のときは，上に述べたことを拡張すればよい。しかし，読者の便をはかり，一般の場合についての要点を述べておく。

11. 一般の場合

仮定

$$\Delta^r u_t=A+\varepsilon_t \qquad (r\geqq 1)$$

を許す場合に，既知の値

$$u_k,\quad \Delta u_{k-1},\quad \ldots\ldots,\quad \Delta^{r-1}u_{k-r+1} \qquad (r-1<k\leqq n)$$

を用いて u_{k+j} ($j\geqq 1$) を表わすことを，先ず取上げよう。

今，m を任意の正の整数とし

(37)
$$\Delta^r y_m=z_m$$

とおくと

$$\Delta^{r-1}y_{m+1}-\Delta^{r-1}y_m=z_m$$
$$\Delta^{r-1}y_m-\Delta^{r-1}y_{m-1}=z_{m-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{r-1}y_2-\Delta^{r-1}y_1=z_1$$

故に

$$\Delta^{r-1}y_{m+1}=\Delta^{r-1}y_1+\sum_{i=1}^{m}z_i \tag{38}$$

次に，(38) により

$$\Delta^{r-2}y_{m+2}-\Delta^{r-2}y_{m+1}=\Delta^{r-1}y_1+\sum_{i=1}^{m}z_i$$
$$\Delta^{r-2}y_{m+1}-\Delta^{r-2}y_m=\Delta^{r-1}y_1+\sum_{i=1}^{m-1}z_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{r-2}y_3-\Delta^{r-2}y_2=\Delta^{r-1}y_1+\sum_{i=1}^{1}z_i$$

故に

$$\Delta^{r-2}y_{m+2}=\Delta^{r-2}y_2+m\Delta^{r-1}y_1+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{t}z_i \tag{39}$$

更に，(39) により

$$\Delta^{r-3}y_{m+3}-\Delta^{r-3}y_{m+2}=\Delta^{r-2}y_2+m\Delta^{r-1}y_1+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{t}z_i$$
$$\Delta^{r-3}y_{m+2}-\Delta^{r-3}y_{m+1}=\Delta^{r-2}y_2+(m-1)\Delta^{r-1}y_1+\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{t}z_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{r-3}y_4-\Delta^{r-3}y_3=\Delta^{r-2}y_2+\Delta^{r-1}y_1+\sum_{t=1}^{1}\sum_{i=1}^{t}z_i$$

故に

$$\Delta^{r-3}y_{m+3}=\Delta^{r-3}y_3+m\Delta^{r-2}y_2+\frac{m(m+1)}{2}\Delta^{r-1}y_1+\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{s}\sum_{i=1}^{t}z_i \tag{40}$$

以下，上と同様のことを繰返えすと

$$y_{m+r}=y_r+m\Delta y_{r-1}+\frac{m(m+1)}{2!}\Delta^2y_{r-2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\Delta^3y_{r-3} \tag{41}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}y_1+\sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{p}\cdots\cdots\sum_{i=1}^{t}z_i$$

を得る。

上の等式における諸係数を得るには次の恒等式

(42) $$\sum_{t=1}^{m}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}=\frac{m(m+1)\cdots(m+r-1)}{r!}$$

を用いるのであるが，この恒等式によると

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{p}\cdots\cdots\sum_{t=1}^{s}\sum_{i=1}^{t}z_i=\sum_{t=1}^{m}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}z_{m+1-t}$$

を得るから，結局

(43) $$y_{m+r}=y_r+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{m(m+1)\cdots(m+r-1-i)}{(r-i)!}\Delta^{r-i}y_i$$
$$+\sum_{t=1}^{m}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}z_{m+1-t}$$

を得る。ただし $r-1=0$ のときは，

$$\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}=1$$

とする。

(43) において，$m=j$ とおき，かつ

$$y_i=u_{k-r+i},\quad \Delta y_i=\Delta u_{k-r+i},\quad \cdots\cdots$$
$$\Delta^{r-1}y_i=\Delta^{r-1}u_{k-r+i}$$

と書けば

(44) $$u_{k+j}=u_k+j\Delta u_{k-1}+\frac{j(j+1)}{2!}\Delta^2u_{k-2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+\sum_{t=1}^{j}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}(A+\varepsilon_{j+1-t})$$

ところで，u_k, Δu_{k-1}, Δ^2u_{k-2}, ……, $\Delta^{r-1}u_{k-r+1}$ を既知とすることは，u_k, u_{k-1}, ……, u_{k-r+1} を既知とすることである。故に上に得た最後の式 (44) は，これら r 個の値を基にして u_{k+j} を表わすものである。

次に，上と同じ値 u_k, u_{k-1}, ……, u_{k-r+1} を用いて，$u_{k-r+1-j}$ $(j\geqq 1)$ を表わす式を求めよう。

m を任意の正の整数とし

(45) $$\Delta^r y_{-m}=z_m$$

とおくと

$$\Delta^{r-1}y_{-m+1}-\Delta^{r-1}y_{-m}=z_m$$
$$\Delta^{r-1}y_{-m+2}-\Delta^{r-1}y_{-m+1}=z_{m-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{r-1}y_0-\Delta^{r-1}y_{-1}=z_1$$

故に

(46) $$\Delta^{r-1}y_{-m}=\Delta^{r-1}y_0-\sum_{i=1}^{m}z_i$$

次に，(46) から

$$\Delta^{r-2}y_{-m+1}-\Delta^{r-2}y_{-m}=\Delta^{r-1}y_0-\sum_{i=1}^{m}z_i$$

$$\Delta^{r-2}y_{-m+2}-\Delta^{r-2}y_{-m+1}=\Delta^{r-1}y_0-\sum_{i=1}^{m-1}z_i$$

....

$$\Delta^{r-2}y_0-\Delta^{r-2}y_{-1}=\Delta^{r-1}y_0-\sum_{i=1}^{1}z_i$$

故に

(47) $$\Delta^{r-2}y_{-m}=\Delta^{r-2}y_0-m\Delta^{r-1}y_0+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{t}z_i$$

更に，(47) から

(48) $$\Delta^{r-3}y_{-m}=\Delta^{r-3}y_0-m\Delta^{r-2}y_0+\frac{m(m+1)}{2!}\Delta^{r-1}y_0-\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{s}\sum_{i=1}^{t}z_i$$

を得，(48) から

(49) $$\Delta^{r-4}y_{-m}=\Delta^{r-4}y_0-m\Delta^{r-3}y_0+\frac{m(m+1)}{2!}\Delta^{r-2}y_0-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\Delta^{r-1}y_0+\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{s}\sum_{i=1}^{t}z_i$$

を得るというようにして，

(50) $$y_{-m}=y_0-m\Delta y_0+\frac{m(m+1)}{2!}\Delta^2y_0-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\Delta^3y_0+\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{m(m+1)\cdots(m+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}y_0+(-1)^r\sum_{t=1}^{m}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}z_{m+1-t}$$

を得る。

(50) において，$m=j$ とおき，かつ

$$y_{-t}=u_{k-r+1-t}$$
$$\Delta y_{-t}=\Delta u_{k-r+1-t}$$
$$\Delta^2y_{-t}=\Delta^2u_{k-r+1-t}$$
....
....
$$\Delta^{r-1}y_{-t}=\Delta^{r-1}u_{k-r+1-t}$$

とおけば，

$$(51)\qquad u_{k-r+1-j}=u_{k-r+1}-j\Delta u_{k-r+1}+\frac{j(j+1)}{2!}\Delta^2u_{k-r+1}$$
$$-\frac{j(j+1)(j+2)}{3!}\Delta^3u_{k-r+1}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+(-1)^r\sum_{t=1}^{j}\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}(A+\varepsilon_{j+1-t})$$

を得る。

そこで，次のことがいえる。

$$\Delta^r u_t=A+\varepsilon_t$$

と仮定し，u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, ……, u_{k-r+1} を既知とするならば，(44) から

$$(52)\qquad E(u_{k+j})=u_k+j\Delta u_{k-1}+\frac{j(j+1)}{2!}\Delta^2u_{k-2}$$
$$+\frac{j(j+1)(j+2)}{3!}\Delta^3u_{k-3}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+\frac{j(j+1)\cdots(j+r-1)}{r!}A$$

(51) から

$$(53)\qquad E(u_{k-r+1-j})=u_{k-r+1}-j\Delta u_{k-r+1}+\frac{j(j+1)}{2!}\Delta^2u_{k-r+1}$$
$$-\frac{j(j+1)(j+2)}{3!}\Delta^3u_{k-r+1}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\Delta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+(-1)^r\frac{j(j+1)\cdots(j+r-1)}{r!}A$$

また，(44) 及び (51) の各から

$$(54)\qquad \mathrm{Var}(u_{k+j})=\mathrm{Var}(u_{k-r+1-j})$$
$$=\sigma^2\sum_{t=1}^{j}\left\{\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}\right\}^2$$

が得られる。

そして，前に述べたことにより

$$A\ \text{の推定値}=\overline{\Delta^r u}=\frac{1}{n-r+1}\sum_{i=0}^{n-r}\Delta^r u_t$$

$$\sigma\ \text{の推定値}=S_r=\left\{\frac{1}{n-r+1}\sum_{i=0}^{n-r}(\Delta^r u_t-\overline{\Delta^r u})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

を用いるならば，与えられた時系列を表わす近似式として，

(55)
$$\hat{u}_{k+j}=u_k+j\varDelta u_{k-1}+\frac{j(j+1)}{2!}\varDelta^2u_{k-2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\varDelta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+\frac{j(j+1)\cdots(j+r-1)}{r!}\overline{\varDelta^r u}\qquad(j\geqq 1)$$

(56)
$$\hat{u}_{k-r+1-j}=u_{k-r+1}-j\varDelta u_{k-r+1}+\frac{j(j+1)}{2!}\varDelta^2u_{k-r+1}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{r-1}\frac{j(j+1)\cdots(j+r-2)}{(r-1)!}\varDelta^{r-1}u_{k-r+1}$$
$$+(-1)^r\frac{j(j+1)\cdots(j+r-1)}{r!}\overline{\varDelta^r u}\qquad(j\geqq 1)$$

を得る。

また，(55) 及び (56) を u_{k+j} 及び $u_{k-r+1-j}$ の近似値あるいは予想値推測値として用いるときの標準誤差 S.E. は，前に述べたと同じ理由により

(57)
$$\text{S.E.}=\left\{\frac{j(j+1)\cdots(j+r-1)}{r!\sqrt{n-r+1}}+\sqrt{\sum_{t=1}^{j}\left\{\frac{t(t+1)\cdots(t+r-2)}{(r-1)!}\right\}^2}\right\}S_r$$

となる。

$u_{k-r+1-j}$						
…						
u_0						
…						
u_{k-r}						
u_{k-r+1}						
	$\varDelta u_{k-r+1}$					
u_{k-r+2}		$\varDelta^2u_{k-r+1}$				
			…			
u_{k-r+3}				…		
					…	
…						$\varDelta^{r-1}u_{k-r+1}$
					…	
…				…		
			…			
u_{k-1}		$\varDelta^2u_{k-2}$				
	$\varDelta u_{k-1}$					
u_k						
u_{k+1}						
…						
u_n						
…						
u_{k+j}						

第 3 図

既に述べたように，(55), (56) は，u_0, u_1, u_2, …… u_n の中から

$$u_k,\quad u_{k-1},\quad u_{k-2},\quad \ldots\ldots,\quad u_{k-r+1}$$

だけを残し，これを基にして，他の値を近似的に表現し，また，実際に観測していない過去の U の値の推測値や，将来の U の値の予想値を算出するに用いられる公式である。

今少し丁寧にいえば，前頁の図において括弧でくくった部分系列およびそれに対応する定差を基にして，u_{k-r} から u_0, 更に u_0 からさかのぼって一般に $u_{k-r+1-j}$ $(j>r-1)$ に対する推定値を与えるのが (56) であり，u_{k+1} から u_n, 更に進んで一般に u_{k+j} $(j>n-k)$ の予想値を与えるのが (55) である。

ところで，$\hat{u}_{-i}$ $(i\geqq1)$ を計算するのに (56) を用いると，(56) において u_{k-r+1}, Δu_{k-r+1}, Δ^2u_{k-r+1}, …… の代りに u_0, Δu_0, Δ^2u_0, …… を用いるときよりも S.E. が大きいので，過去の U の値を推測するには，後者を用いるがよい。

同様に，$\hat{u}_{n+i}$ $(i\geqq1)$ を計算するのに (55) を用いると，(55) において，u_k, Δu_{k-1}, Δ^2u_{k-2}, …… の代りに u_n, Δu_{n-1}, Δ^2u_{n-2}, …… を用いるときよりも S.E. が大きいので，将来値を予想するには，後者を用いてするがよい。

観測値 u を $y=\log u$ とか $y=\dfrac{1}{u}$ で変換しておいて，上述の方法の適用できる場合のあることはいうまでもない。