相異なる二物質の部分より成る半無限の固体の熱伝導

小　平　吉　男

Conduction of Heat in One-Dimension in a Semi-infinite Solid composed of Two Parts with Different Conductivities and Diffusivities.

By Y. Kodaira

緒　言

著者はある研究所の一研究員から，半無限の固体の表面の層が他の物質部分から成る場合の温度分布を如何にして解析的に求めるかという質問を受けた。この問題は非常に簡単な場合，例えば周期的の熱伝導の場合の如きは，容易に解き得られるが，一般の初期値問題として取扱うと必ずしも簡単に解き得られるという訳には行かない。そこで得られた結果をここに紹介して類似の問題の解を求めるための参考にしたいと思う。

問題の提起

今温度を u を以て表わし，座標，時間をそれぞれ x, t を以て表わすと，熱伝導の微分方程式は，

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\kappa_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+Q_1(x,\ t),\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=\kappa_2^2\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+Q_2(x,\ t) \qquad (1),\ (2)$$

の如く書かれる。1, 2 の脚符はそれぞれ相異る物質に対して附してあり，$Q_1(x, t)$, $Q_2(x, t)$ は固体内部にて熱を発生するとして，微分方程式の中に入れてある。

境界条件として

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=-a_1}=0,\ (u_1)_{x=0}=(u_2)_{x=0}=0,\quad k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}=k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=0}, \qquad (3),\ (4),\ (5)$$

初期条件として

$$(u_1)_{t=0}=f_1(x), \qquad (u_2)_{t=0}=f_2(x) \qquad (6),\ (7)$$

を採る。境界条件 (3) は $x=-a_1$ に於いて熱を通さない条件である。

問題の解き方—その一

この問題を解くには，普通やるように

$$u_1=v_1+w_1, \qquad u_2=v_2+w_2$$

と置き，次の微分方程式及び諸条件を満足するように v_1, v_2, w_1, w_2 を決定すればよい：

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\kappa_1^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+Q_1(x,\ t),\quad \frac{\partial v_2}{\partial t}=\kappa_2^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+Q_2(x,\ t), \qquad (8),\ (9)$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_{x=-a_1}=0,\ (v_1)_{x=0}=(v_2)_{x=0},\ k_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_{x=0}=k_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{x=0}; \qquad (10),\ (11),\ (12)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}=\kappa_1^2\frac{\partial w_2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial t}=\kappa_2^2\frac{\partial w_2}{\partial x^2}, \qquad (13),\ (14)$$

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=-a_1}=0,\ (w_1)_{x=0}=(w_2)_{x=0},\ k_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=0}=k_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad (15),\ (16),\ (17)$$

$$(w_1)_{t=0}=f_1(x)+(v_1)_{t=0}\equiv F_1(x),\quad (w_2)_{t=0}=f_2(x)+(v_2)_{t=0}\equiv F_2(x). \qquad (18),\ (19)$$

問題の解き方—その二

最初に (13), (14) を解くことから初める。

微分方程式 (13), (14) の解として

$$w_1=e^{\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\{A_1(\alpha)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)+B_1(\alpha)\sin\kappa_2\alpha(a_1+x)\} \qquad (20)$$

$$w_2=e^{\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\{A_2(\alpha)\cos\kappa_1\alpha x+B_2(\alpha)\sin\kappa_1\alpha x\} \qquad (21)$$

と置く。$A_1(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$ は α の函数であるが，x, t は含まないものとする。今

$$X_1=A_1(\alpha)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)+B_1(\alpha)\sin\kappa_2\alpha(a_1+x), \qquad (22)$$

$$X_2=A_2(\alpha)\cos\kappa_1\alpha x+B_2(\alpha)\sin\kappa_1\alpha x \qquad (23)$$

と置き，境界条件：

$$\left(\frac{dX_1}{dx}\right)_{x=-a_1}=0,\ (X_1)_{x=0}=(X_2)_{x=0},\ \left(\frac{dX_1}{dx}\right)_{x=0}=\left(\frac{dX_2}{dx}\right)_{x=0} \qquad (24),\ (25),\ (26)$$

に入れれば，

$$X_1=A_1(\alpha)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x),$$

$$X_2=A_1(\alpha)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x\right)$$

となる。或は $A_1(\alpha)=k_2\kappa_1 A(\alpha)$ と置けば，

$$X_1=A(\alpha)k_2\kappa_1\cos\kappa_2\alpha(a_1+x) \qquad (27)$$

$$X_2=A(\alpha)k_2\kappa_1\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-k_1\kappa_2\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x) \qquad (28)$$

が得られる。

(27), (28) の α については，制限がないから，0 から ∞ まで積分すれば，次の如くなる：

$$w_1=k_2\kappa_1\int_0^\infty A(\alpha)e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)\,d\alpha, \qquad (29)$$

$$w_2=\int_0^\infty A(\alpha)e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}$$
$$\times(k_2\kappa_1\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-k_1\kappa_2\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1 x\alpha)\,d\alpha. \qquad (30)$$

(29), (30) を初期条件 (18), (19) 入れれば，

$$F_1(x)=k_2\kappa_1\int_0^\infty A(\alpha)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)\,d\alpha, \qquad (31)$$

$$F_2(x)=\int_0^\infty A(\alpha)(k_2\kappa_1\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-k_1\kappa_2\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x)\,d\alpha \qquad (32)$$

となる。このような形の積分を用いて $F_1(x)$, $F_2(x)$ が表わせれば，問題は解けるのであるが，それは未だ知られていない。

問題の解き方—その三

任意の函数を x の $-a_1$ と ∞ との間で (31), (32) の形に表わすことは出来ていないので，先づ $-a_1$ から a_2 までの板を考へ，$x=-a_1$ と $x=0$ における境界条件は本問題の境界条件のままとし，$x=a_2$ における境界条件を適宜与へて板の熱伝導の問題を解き，然る後に $a_2\to\infty$ とすればよい。

此処では $x=a_2$ に於ける条件を

$$(u_2)_{x=a_2}=0 \tag{33}$$

と採ることとする。この条件は他の適当なものを選ぶことも出来る。

(28) を (33) 条件に入れれば,

$$k_2\kappa_1 \cos \kappa_2\alpha a_1 \cos \kappa_1\alpha a_2 - k_2\kappa_1 \sin \kappa_2\alpha a_1 \sin \kappa_1\alpha a_2=0, \tag{34}$$

或は,

$$\tan \kappa_2\alpha a_1 \tan \kappa_1\alpha a_2=\frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \tag{35}$$

となる。この式の根には $\alpha=0$ はない。今 (35) の式の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを α_s と書く。

問題は

$$F_1(x)=k_2\kappa_1\sum_{s=1}^{\infty}A(\alpha_s)\cos \kappa_1\alpha_s(a_1+x),$$

$$F_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}A(\alpha_s)(k_2\kappa_1 \cos \kappa_2\alpha_s a_1 \cos \kappa_1\alpha_s x - k_1\kappa_2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s x)$$

の如き展開が出来ればよいことになる。或は

$$\frac{k_2\kappa_1}{\sin \kappa_1\alpha_s a_2}A(\alpha_s)=B(\alpha_s)$$

と置けば，上式は次の如く書かれる：

$$F_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}B(\alpha_s)\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \cos \kappa_2\alpha_s(a_1+x), \tag{36}$$

$$F_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}B(\alpha_s)\cos \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s(a_2-x). \tag{37}$$

今

$$\left.\begin{aligned} Y_1(\alpha_s,\ x)&=\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \cos \kappa_2\alpha_s(a_1+x), \\ Y_2(\alpha_s,\ x)&=\cos \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s(a_2-x) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

と置く。然るときは,

$$\begin{aligned} &k_1\int_{-a_1}^{0}F_1(x)Y_1(\alpha_p,\ x)\,dx+k_2\int_0^{a_2}F_2(x)Y_2(\alpha_p,\ x)\,dx \\ &\quad=\sum_{s=1}^{\infty}B(\alpha_s)\left(k_1\int_{-a_1}^{0}Y_1(\alpha_2,\ x)Y(\alpha_p,\ x)\,dx+k_2\int_0^{a_2}Y_2(\alpha_s,\ x)Y_2(\alpha_p,\ x)\right)dx \end{aligned} \tag{39}$$

となる。然るに $Y_1(\alpha_s,\ x)$, $Y_2(\alpha_s,\ x)$ はそれぞれ (40)

$$\frac{d^2Y_1(\alpha_s,\ x)}{dx}+\kappa_2^2\alpha_s^2Y_1(\alpha_s,\ x)=0, \tag{41}$$

$$\frac{d^2Y_2(\alpha_s,\ x)}{dx}+\kappa_1^2\alpha_s^2Y_2(\alpha_s,\ x)=0$$

を満足する。(40) に $k_1Y_1(\alpha_p,\ x)$ を掛けて $-a_1$ から 0 まで積分し，(41) に $k_2Y_2(\alpha_p,\ x)$ を掛けて 0 から a_2 まで積分して加えると次の如くなる:

$$k_1\int_{-a_1}^{0}\frac{d^2Y_1(\alpha_s,\ x)}{dx^2}\ Y_1(\alpha_p,\ x)\ dx+k_2\int_0^{a_2}\frac{d^2Y_2(\alpha_s,\ x)}{dx^2}\ Y_2(\alpha_p,\ x)\,dx$$

$$=k_1\left[\frac{dY_1(\alpha_s,\ x)}{dx}\ Y_1(\alpha_p,\ x)\right]_{-a_1}^{0}-k_1\int_{-a_1}^{0}\frac{dY_1(\alpha_s,\ x)}{dx}\ \frac{dY_2(\alpha_p,\ x)}{dx}\,dx$$

$$+k_2\left[\frac{dY_2(\alpha_s,\ x)}{dx}\ Y_2(\alpha_p,\ x)\right]_{0}^{a_2}-k_2\int_{0}^{a_2}\frac{dY_2(\alpha_s,\ x)}{dx}\ \frac{dY_2(\alpha_p,\ x)}{dx}\,dx \quad (42)$$

$$=-k_1\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2\int_{-a_1}^{0}Y_1(\alpha_s,\ x)Y_1(\alpha_p,\ x)dx-k_2\kappa_1{}^2\alpha_s{}^2\int_0^{a_2}Y_2(\alpha_s,\ x)Y_2(\alpha_p,\ x)\,dx. \quad (43)$$

$s\neq p$ として，$Y_1(\alpha_s,\ x)$ と $Y_1(\alpha_p,\ x)$；$Y_2(\alpha_s,\ x)$ と $Y_2(\alpha_p,\ x)$ の役割を逆にしたものを作り，(42) から引けば，

$$k_1\left(\frac{dY_1(\alpha_s,\ x)}{dx}\ Y_1(\alpha_p,\ x)-\frac{dY_1(\alpha_p,\ x)}{dx}\ Y_1(\alpha_s,\ x)\right)_{x=0}$$

$$+k_2\left(\frac{dY_2(\alpha_s,\ x)}{dx}\ Y_2(\alpha_p,\ x)-\frac{dY_2(\alpha_p,\ x)}{dx}\ Y_2(\alpha_s,\ x)\right)_{x=0}$$

$$=-(\alpha_s{}^2-\alpha_p{}^2)\left(k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}Y_1(\alpha_s,\ x)Y_1(\alpha_p,\ x)\,dx-k_2\kappa_1{}^2\int_0^{a_2}Y_2(\alpha_s,\ x)Y_2(\alpha_p,\ x)\,dx\right) \quad (44)$$

となる。$\alpha_s\neq\alpha_p$ であるから，境界条件により，(44) の括弧の中は 0 となる。即ち

$$k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}Y_1(\alpha_s,\ x)Y_1(\alpha_p,\ x)dx+k_2\kappa_1{}^2\int_0^{a_2}Y_2(\alpha_s,\ x)Y_2(\alpha_p,\ x)\,dx=0 \quad (45)$$

が得られる。

$\alpha=p$ の場合には，次のような積分値が得られる：

$$k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}Y_1{}^2(\alpha_p,\ x)\,dx+k_2\kappa_1{}^2\int_0^{a_2}Y_2{}^2(\alpha_p,\ x)\,dx$$

$$=\frac{k_1\kappa_2{}^2a_1\sin^2\kappa_1\alpha_pa_2+k_2\kappa_1{}^2a_2\cos^2\kappa_2\alpha_pa_1}{2}. \quad (46)$$

(45), (46) により，任意の函数 $F_1(x)_1$, $F_2(x)$ の展開式が得られる：

$$F_1(x)=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\kappa_1\alpha_sa_2\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+x)}{k_1\kappa_2{}^2a_1\sin^2\kappa_1\alpha_sa_2+k_2\kappa_1{}^2a_2\cos^2\kappa_2\alpha_sa_1}$$

$$\times\left(k_1\kappa_2{}^2\sin\kappa_1\alpha_sa_2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+\lambda)\,d\lambda\right. \quad (47)$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa_2\alpha_sa_1\int_0^{a_2}F_2(\lambda)\sin\kappa_1\alpha_s(a_2-x)\,dx\right),$$

$$F_2(x)=2\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha_sa_1\sin\kappa_1\alpha_s(a_2-x)}{k_1\kappa_2{}^2a_1\sin^2\kappa_1\alpha_sa_2+k_2\kappa_1{}^2a_2\cos^2\kappa_2\alpha_sa_1}$$

$$\times\left(k_1\kappa_2{}^2\sin\kappa_1\alpha_sa_2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa_2\alpha_sa_1\int_0^{a_2}F_2(\lambda)\sin\kappa_1\alpha_s(a_2-\lambda)\,d\lambda\right). \quad (48)$$

この式の中の α_s は

$$\tan\kappa_2a_1\xi\tan\kappa_1a_2\xi=\frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2} \quad (49)$$

の正根を大きさの順序に並べて s 番目の根である。

(47), (48) の展開式を用いて板の熱伝導の問題の解を得ることは容易であるが，それは本問題の目的ではないので，上の展開式が得られたことで満足しよう。

問題の解き方—その四

次に $a_2\to\infty$ として，(47) 及び (48) を積分の形にしなくてはならない。それには先ず (49) が $a_2\to\infty$ のときにどうなるかを考えなくてはならない。$\kappa_1 a_2\xi=\zeta$ と置けば (49) は

$$\tan\frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_1 a_2}\zeta\tan\zeta=\frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2}$$

となる。a_1 を一定にして置いて a_2 を次第に大きくすれば，この式は次第に

$$\tan\zeta=\infty$$

となることが分るであろう。従って根は

$$\alpha_s\doteqdot\left(\frac{\pi}{2}+s\pi\right)\frac{1}{\kappa_1 a_2}=\frac{(2s+1)\pi}{2\kappa_1 a_2},\quad [s=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots]$$

にて与えられることになる。

(47) に於いて $a_2\to\infty$ とするために次のような書換を行なう：

$$F_1(x)=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+x)}{k_1\kappa_1{}^2a_1+k_2\kappa_1{}^2a_2\dfrac{\cos^2\kappa_2\alpha_s a_1}{\sin^2\kappa_1\alpha_s a_2}}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa_2\alpha_s a_1\int_0^{a_2}(\cos\kappa_1\alpha_s\lambda-\cot\kappa_1\alpha_s a_2\sin\kappa_1\alpha_s\lambda)\,d\lambda\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+x)}{\dfrac{k_2\kappa_1 a_1}{a_2}+k_2\kappa_1\cos^2\kappa_2\alpha_s a_1(1+\cot^2\kappa_1\alpha_s a_2)}\cdot\frac{\pi}{\kappa_1 a_2}$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa_1\alpha_s a_1\int_0^{a_2}F_2(\lambda)\left(\cos\kappa_1\alpha_s\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\tan\kappa_2\alpha_s a_1\sin\kappa_1\alpha_s\lambda\right)d\lambda\right\}.$$

この式に於いて α_s を α と書き，$a_2\to\infty$ とすれば，

$$F_1(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)}{k_2\kappa_1\cos^2\kappa_2 a_1\alpha\left(1+\dfrac{k_1{}^2\kappa_2{}^2}{k_2{}^2\kappa_1{}^2}\tan^2\kappa_2 a_1\alpha\right)}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa_2 a_1\alpha\int_0^{\infty}F_2(\lambda)\left(\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\tan\kappa_2 a_1\alpha\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}$$

$$=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)}{k_2{}^2\kappa_1{}^2\cos^2\kappa_2 a_1\alpha+k_1{}^2\kappa_2{}^2\sin_2\kappa_2 a_1\alpha}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_0^{\infty}F_2(\lambda)\left(\cos\kappa_2 a_1\alpha\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2 a_1\alpha\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}.\quad(50)$$

同様に (48) から

$$F_2(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\kappa_2\alpha_s a_1(\cos\kappa_1\alpha_s x-\cot\kappa_1\alpha_s a_1\sin\kappa_1\alpha_s x)}{\dfrac{k_2\kappa_1 a_1}{a_2}+\cos^2\kappa_2\alpha_s a_1(1+\cot^2\kappa_1\alpha_s a_2)}\cdot\frac{\pi}{\kappa_1 a_2}$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^{0}F_1(\lambda)\cos\kappa_2(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$+k_2\kappa_1^2\cos\kappa_2\alpha_s a_1\int_0^{a_2}F_2(\lambda)\left(\cos\kappa_1\alpha_s\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_1\kappa_2}\tan\kappa_2\alpha_s a_1\sin\kappa_1\alpha_s\lambda)\right)d\lambda\Big\}.$$

この式に於いて $a_2\to\infty$ とすれば,

$$F_2(x)=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\dfrac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x}{k_2^2\kappa_1^2\cos^2\kappa_2 a_1\alpha+k_1^2\kappa_2^2\sin^2\kappa_2 a_1\alpha}\,d\alpha$$
$$\times\Big\{k_1\kappa_2^2\int_{-a_1}^0 F_1(\lambda)\cos\kappa_2(a_1+\lambda)\,d\lambda$$
$$+k_2\kappa_1^2\int_0^\infty F_2(\lambda)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda)\,d\lambda\right)\Big\}.\quad(51)$$

(50), (51) に於いて, 一様な固体で $k_1=k_2\equiv k$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$ の場合を考えれば, 何れも

$$F(x)=\frac{2\kappa}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-a_1}^\infty F(\lambda)\cos\kappa\alpha(a_1+x)\cos\kappa\alpha\,(a_1+\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-a_1}^\infty F(\lambda)\cos\alpha(a_1+x)\cos\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda$$

となる。但し

$$F(x)\equiv F_1(x),\ [-a_1<x<0],\ F(x)\equiv F_2(x),\ [0<x<\infty]$$

としてある。又若し $a_1=0$ ならば, 普通の余弦積分が得られる。

問題の解き方—その五

(8), (9) をその境界条件を満足する解を出すために

$$Q_1(x,\ t)=\int_0^\infty v(\alpha,\ t)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)\,d\alpha,\tag{52}$$

$$Q_2(x,\ t)=\int_0^\infty v(\alpha,\ t)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x\right)d\alpha\tag{53}$$

と置く。但し

$$v(\alpha,\ t)=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi(k_2^2\kappa_1^2\cos^2\kappa_2 a_1\alpha+k_1^2\kappa_2^2\sin^2\kappa_2 a_1\alpha)}$$
$$\times\Big\{k_1\kappa_2^2\int_{-a_1}^0 Q_1(\lambda,\ t)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,a\lambda$$
$$+k_2\kappa_1^2\int_0^\infty Q_2(\lambda,\ t)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\Big\}.\quad(54)$$

(52), (53) を (8), (9) に入れて, 積分記号を省略して書けば,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\kappa_1^2\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+v(\alpha,\ t)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x),\tag{55}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}=\kappa_2^2\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+v(\alpha,\ t)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x\right)\tag{56}$$

となる。今

$$v_1=V_1(\alpha,\ t)\cos\kappa_2\alpha(a_1+x),\tag{57}$$

$$v_2=V_2(\alpha,\ t)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x\right)\tag{58}$$

と置いて, 上式に代入すれば,

$$\frac{dV_1}{dt}+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2V_1=v(\alpha,\ t),\quad \frac{dV_2}{dt}+\kappa_1^2\kappa_2^2V_2=v(\alpha,\ t)$$

となり, 何れも同じ微分方程式を満足する。 $V_1(\alpha,\ t)=V_2(\alpha,\ t)\equiv V(\alpha,\ t)$ と書くこととする。

$$V(\alpha,\ t)=\int_0^t e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2(t-\tau)}\,v(\alpha,\ \tau)\,d\tau \tag{59}$$

を採ることにすれば $V(\alpha,\ 0)=0$ である。

(59) に依り v_1, v_2 は次の如く与えられる：

$$v_1=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^t e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2(t-\tau)}\,d\tau\int_0^\infty\frac{\cos\kappa_2\alpha(a+x)}{k_2{}^2\kappa_1{}^2\cos^2\kappa_2a_1\alpha+k_1{}^2\kappa_2{}^2\sin^2\kappa_1a_1\alpha}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^0 Q_1(\lambda,\ \tau)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_0^\infty Q_2(\lambda,\ \tau)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}, \tag{60}$$

$$v_2=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^t e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2(t-\tau)}\,d\tau\int_0^\infty\frac{\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\dfrac{k_2\kappa_2}{k_1\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x}{k_2{}^2\kappa_1{}^2\cos^2\kappa_2a_1\alpha+k_1{}^2\kappa_2{}^2\sin^2\kappa_1a_1\alpha}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^0 Q_1(\lambda,\ \tau)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_0^\infty Q_2(\lambda,\ \tau)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}. \tag{61}$$

又 w_1, w_2 は積分 (50), (51) を用いて次の如くなる：

$$w_1=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2t}\cos\kappa_2\alpha(a_1+x)}{k_2{}^2\kappa_1{}^2\cos^2\kappa_2a_1\alpha+k_1{}^2\kappa_2{}^2\sin^2\kappa_1a_1\alpha}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_2\kappa_1{}^2\int_0^\infty f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_0^\infty f_2(\lambda)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}, \tag{62}$$

$$w_2=\frac{2k_2\kappa_1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2t}\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha x-\dfrac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha x\right)}{k_2{}^2\kappa_1{}^2\cos^2\kappa_2a_1\alpha+k_1{}^2\kappa_2{}^2\sin^2\kappa_1a_1\alpha}\,d\alpha$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\int_{-a_1}^0 f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha(a_1+\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_0^\infty f_2(\lambda)\left(\cos\kappa_2\alpha a_1\cos\kappa_1\alpha\lambda-\frac{k_1\kappa_2}{k_2\kappa_1}\sin\kappa_1\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha\lambda\right)d\lambda\right\}. \tag{63}$$

(60), (61) によって v_1, v_2, (62), (63) によって w_1, w_2 が与えられたから，夫々の和 v_1+w_1, v_2+w_2 を作れば，本問題の解 u_1, u_2 が得られる。