群論の天気分布分析への応用

渡　辺　次　雄

1. まえがき

1922年寺田寅彦(1)は気象集誌40週年記念号において，「気象学上の問題に群（group）の概念を応用する事の可能性について」なる論文を発表し，天気変化をおこすオペレーターを要素とするアーベル群を考えることによって，いくつかのオペレーターの結びつきを吟味する方法の有効であることを示唆した。その後，1930年，藤原咲平(2)がこの思想に注意したが，とくに発展することはなかった。また1947年小﨟盤雄(3)も長期気象変動の問題に関連してこの思想に注目したがとくに進展することがなかった。1953年，筆者(4)は部分群の考えが天気変化の機構を発見するにきわめて有効であることを強調し，さらに，1955年には，極東域700mb半旬偏差図の解析に応用して重要な結果をみちびいた(5)。

ここでは，天気分布の変化を例にとって，群の底表示や準同型の概念が有用であることを強調したいと考える。

2. 天気分布変化の群による表現

たとえば，第1図に示すように，日本全土を（A）北海道，(B)本州太平洋側，(C)本州日本海側，(D)九州方面の地域に分ち，各地域の毎日の広域天気の変化をしらべるとする。簡単のために，降水の有無に着目し，相続く2日の間に天気の変化したとき－で，変化しないとき＋で表わすことにすると，次の16通りの場合がおこる。ただし，括弧内の符号は順次 A, B, C, D 地域についてのものである。

a （＋＋＋＋），
b （－＋＋＋），
c （＋＋－＋），
d （＋＋＋－），

(1) 寺田寅彦 (1922)：気象学上の問題に群（group）の概念を応用する事の可能性について，気象集誌，第41年。452～457.

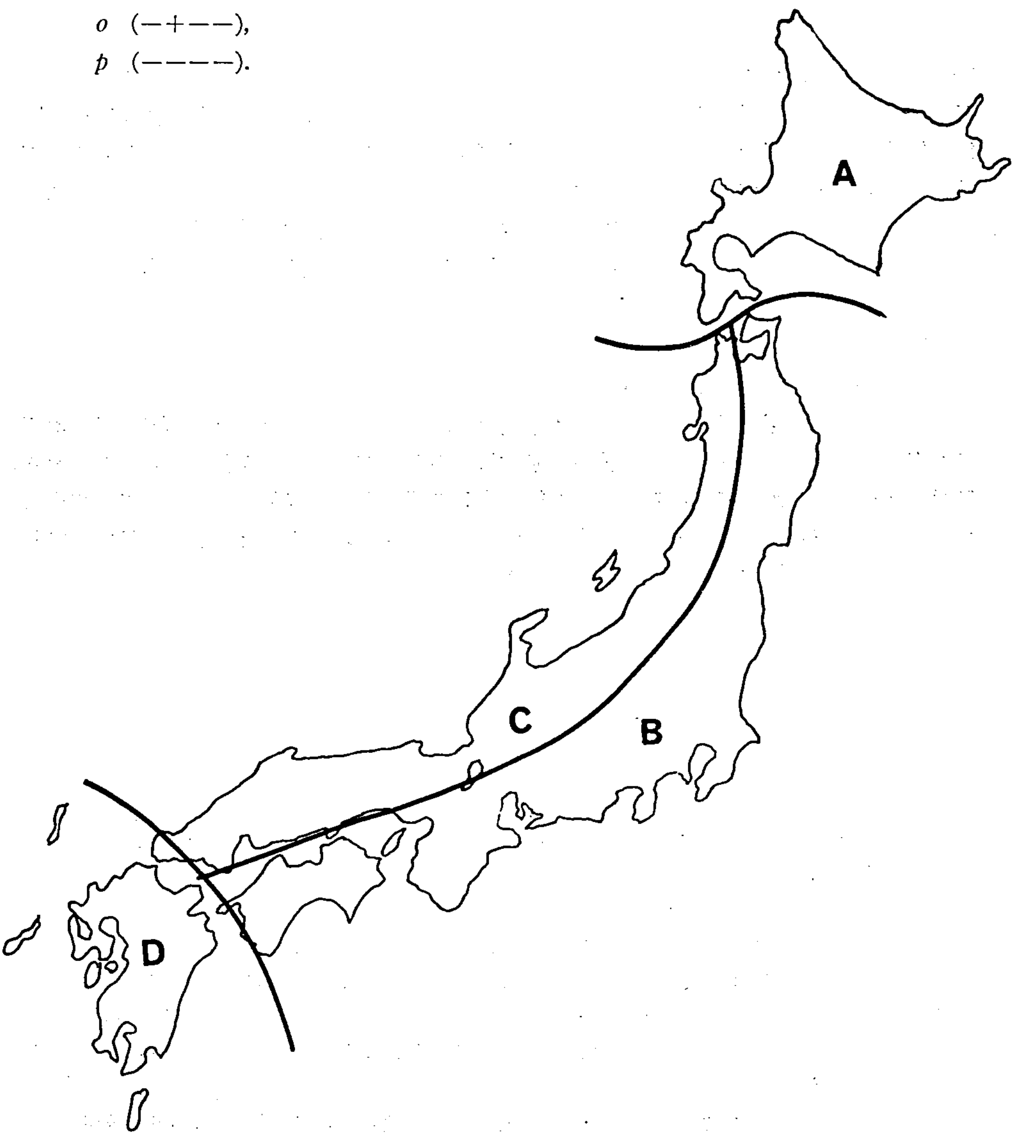
(2) Fujiwhara (1930)：The lunar influence on the atmospheric pressure in the Far East. I. Introduction，東京帝国大学理学部紀要，第1類　2冊第4篇。

(3) 小﨟盤雄 (1947)：類似法について (I)，東北地方長期予報研究会，第7年第7号，12～14。

(4) 渡辺次雄 (1953)：群論の天気予報への応用，気象研究所第13回月例会；天気予報に群の概念を応用する可能性について，第224回総合談話会；群論と天気予報，予報研究ノート，4，226～237.

(5) 渡辺次雄 (1955)：極東域700mb 半旬偏差図の持続性について，中央気象台研究時報，7，238～241.

e $(+-++)$,
f $(-+-+)$,
g $(++--)$,
h $(+-+-)$,
i $(--++)$,
j $(-++-)$,
k $(+--+)$,
l $(+---)$,
m $(--+-)$,
n $(---+)$,
o $(-+--)$,
p $(----)$.



第 1 図　地域区分 (A), (B), (C), (D) を示す。

今，2つの変化（オペレーター），たとえば i, j が相続いておこったとすると，

$$i\,j \equiv (--++)\cdot(-++-)$$
$$= (+-+-) \equiv h$$

なる結合で表わせると考えると，これら 16 コのオペレーターは1つのアーベル群をつくることは容易に確めることができる。群表は第1表に示すようである。

第1表 群　　表

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
a	a															
b	b	a														
c	c	f	a													
d	d	j	g	a												
e	e	i	k	h	a											
f	f	c	b	o	n	a										
g	g	o	d	c	l	j	a									
h	h	m	l	e	d	p	k	a								
i	i	e	n	m	b	k	p	j	a							
j	j	d	o	b	m	g	f	i	h	a						
k	k	n	e	l	c	i	h	g	f	p	a					
l	l	p	h	k	g	m	e	c	o	n	d	a				
m	m	h	p	i	j	l	n	b	d	e	o	f	a			
n	n	k	i	p	f	e	d	o	c	l	b	j	g	a		
o	o	g	j	f	p	d	b	n	l	c	m	i	k	h	a	
p	p	l	m	n	o	h	i	f	g	k	j	b	c	d	e	a

たとえば，1954 年から 1964 年に至る 11 年間における気象庁の速報天気図をもとにしてこれら 16コのオペレーターの度数をしらべてみた結果のうち，1月のものを第2表にあげてある。これによると，最大度数は a の 19% であって，全国的に持続した天気の場合の多いことを示している。次は b の 17%，これは北海道のみ天気が変化し，他は持続している場合である。また，もっとも少いのは h の 1% で，これは，北海道と本州日本海側の天気が持続し，九州太平洋側の天気の変化した場合である。このように，この度数表だけでもいくつかの重要な事実を表わしているのであるが，今次のような方法でこれを整理してみよう。

すなわち，＋を1で，－を0で表わし，たとえば，$f\,(-+-+)$ を 0 1 0 1 なる2進法の数と考え10進法で換算すると5になる。そこで f に5を対応させる。このようにすると，a は 15，p は0となる，今，$a, b, c, \cdots, p$ に0ないし15の数字をあてはめ(6)，この数字の順序に第3表のように排列してみよう。これをみるとわかるように，第2列 (o, f, j, b) と第4列 (g, c, d, a) には度数の大きいものがならんでおり，しかも，この 98 コの

第 2 表　1月のオペレーター度数表（1954～1964）

元	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	計
度　数	62	57	44	22	5	36	22	3	9	19	7	7	4	8	14	11	330
百分率	19	17	13	7	2	11	7	1	3	6	2	2	1	2	4	3	100

第 3 表

11 (p)	14 (o)	7 (l)	22 (g)
8 (n)	36 (f)	7 (k)	44 (c)
4 (m)	19 (j)	3 (h)	22 (d)
9 (i)	57 (b)	5 (e)	62 (a)

元はもとの16位の群の部分群をつくっている。このことは，この8位の群で表わされるような天気変化機構のあることを示唆するものである。

さらに，この8位の部分群の元のうち，長方形の頂点をなす f, b, a, c の元の数も多く，しかも，この4つは 4 位の部分群をつくっているのである。このことは，4 位の部分群 (a, b, c, f) で表わされる天気変化機構のあることを示唆している。なお，細部をみると，a, b の度数が多く，このことは部分群 (a, b) で表わされる機構のあることを示すものとみてよいであろう。

このようにして，このような地域分布のもとで，次の3つの部分群で表わされるような物理機構の存在することを推論することができるのである。しかし，ここでその物理的吟味にまで立入ることは目的とするところでない。

部分群 (a, b, c, d, f, g, j, o),
(a, b, c, f),
(a, b).

そして，今仮りに，各群ともほぼおなじ度数の元からなるとすると，上の3つはほぼおなじ割合でおこっていることになる。このように部分群の考えが有効であることは，すでに 700mb 面天気図についても論じたことである(7)。

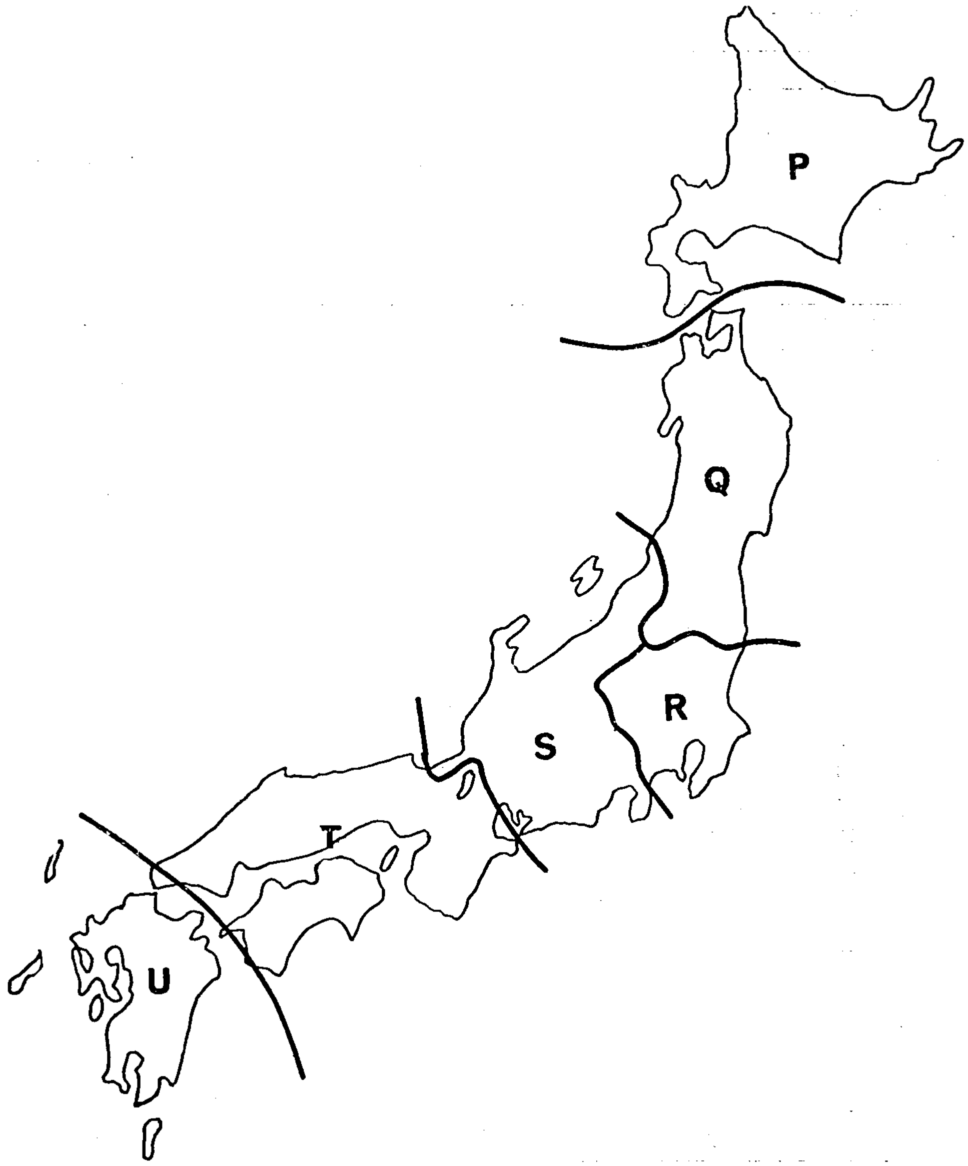
3. 底表示の応用

たとえば，第2図に示すように，日本全土を，(P) 北海道，(Q) 東北地方，(R) 関東地方，(S) 中部地方，(T) 近畿地方，(U) 九州地方の6地域に分ち，各地域の天気の変化しないとき＋，変化したとき－で表わすと，前節と同様にして，(－－－－－－)，(－－－－－＋)，(－－－－＋－)，………… などからなるところの $2^6=64$ 位のアーベル群をうる。結合などの定義は前節と同じである。これに前節と同じように 00 ないし 63 の数を対応させることとして，2組の底表示を求めてみよう。1つは底として

a =(－－－－－＋),
b =(－－－－＋－),
c =(－－－＋－－),
d =(－－＋－－－),
e =(－＋－－－－),
f =(＋－－－－－),

(6) p (0), n (1), m (2), i (3), o (4), f (5), j (6), b (7), l (8), k (9), h (10), e (11), g 12), c 13), d (14), a (15) の順。

(7) 渡辺次雄 (1955)：極東域 700mb 半旬偏差図の持続性について，中央気象台研究時報，7, 238～241.



第 2 図　地域区分 (P), (Q), (R), (S), (T), (U) を示す。

を採用することとし，今1つは底として，

$$\alpha = (+++++-),$$
$$\beta = (++++-+),$$
$$\gamma = (+++-++),$$
$$\delta = (++-+++),$$
$$\varepsilon = (+-++++),$$
$$\zeta = (-+++++)$$

を採用することにする。こうすると，次の第4表をうる。ここで，度数は前節とおなじく1954～1964 年における 1 月の速報天気図からとったもので，前節と同じ資料にもとずいている。

第 4 表

番 号	I	II	度 数	度 数
00	$a\ b\ c\ d\ e\ f$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	
01	a	$\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	4	
02	b	$\alpha\ \beta\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	
03	$c\ d\ e\ f$	$\alpha\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	
04	c	$\alpha\ \beta\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	10
05	$b\ d\ e\ f$	$\beta\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	
06	$a\ d\ e\ f$	$\alpha\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$	0	
07	$a\ b\ c$	$\delta\ \varepsilon\ \zeta$	1	
08	d	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \varepsilon\ \zeta$	4	
09	$b\ c\ e\ f$	$\beta\ \gamma\ \varepsilon\ \zeta$	3	
10	$a\ c\ e\ f$	$\alpha\ \gamma\ \varepsilon\ \zeta$	2	
11	$a\ b\ d$	$\gamma\ \varepsilon\ \zeta$	14	46
12	$a\ b\ e\ f$	$\alpha\ \beta\ \varepsilon\ \zeta$	3	
13	$a\ c\ d$	$\beta\ \varepsilon\ \zeta$	3	
14	$b\ c\ d$	$\alpha\ \varepsilon\ \zeta$	8	
15	$e\ f$	$\varepsilon\ \zeta$	9	
16	e	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \zeta$	2	
17	$b\ c\ d\ f$	$\beta\ \gamma\ \delta\ \zeta$	3	
18	$a\ c\ d\ f$	$\alpha\ \gamma\ \delta\ \zeta$	0	
19	$a\ b\ e$	$\gamma\ \delta\ \zeta$	5	17
20	$a\ b\ d\ f$	$\alpha\ \beta\ \delta\ \delta$	1	
21	$a\ c\ e$	$\beta\ \delta\ \delta$	2	
22	$b\ c\ e$	$\alpha\ \delta\ \delta$	0	
23	$d\ f$	$\delta\ \delta$	4	
24	$a\ b\ c\ f$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \zeta$	5	
25	$a\ d\ e$	$\beta\ \gamma\ \zeta$	12	
26	$b\ d\ e$	$\alpha\ \gamma\ \zeta$	1	
27	$c\ f$	$\gamma\ \zeta$	15	80
28	$c\ d\ e$	$\alpha\ \beta\ \zeta$	4	
29	$b\ f$	$\beta\ \zeta$	10	
30	$a\ f$	$\alpha\ \zeta$	9	
31	$a\ b\ c\ d\ e$	ζ	24	

32	f	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$	3	
33	$b\ c\ d\ e$	$\alpha\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$	3	
34	$a\ c\ d\ e$	$\alpha\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$	1	
35	$a\ b\ f$	$\gamma\ \delta\ \varepsilon$	2	15
36	$a\ b\ d\ e$	$\alpha\ \beta\ \delta\ \varepsilon$	1	
37	$a\ c\ f$	$\beta\ \delta\ \varepsilon$	2	
38	$b\ c\ f$	$\alpha\ \delta\ \varepsilon$	1	
39	$d\ e$	$\delta\ \varepsilon$	2	
40	$a\ b\ c\ e$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \varepsilon$	4	
41	$a\ d\ f$	$\beta\ \gamma\ \varepsilon$	5	
42	$b\ d\ f$	$\alpha\ \gamma\ \varepsilon$	5	
43	$c\ e$	$\gamma\ \varepsilon$	7	48
44	$c\ d\ f$	$\alpha\ \beta\ \varepsilon$	3	
45	$b\ e$	$\beta\ \varepsilon$	8	
46	$a\ e$	$\alpha\ \varepsilon$	3	
47	$a\ b\ c\ d\ f$	ε	13	
48	$a\ b\ c\ d$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	3	
49	$a\ e\ f$	$\beta\ \gamma\ \delta$	2	
50	$b\ e\ f$	$\alpha\ \gamma\ \delta$	2	
51	$c\ d$	$\gamma\ \delta$	1	15
52	$c\ e\ f$	$\gamma\ \varepsilon\ \delta$	3	
53	$b\ d$	$\beta\ \delta$	2	
54	$a\ d$	$\alpha\ \delta$	2	
55	$a\ b\ c\ e\ f$	δ	0	
56	$d\ e\ f$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	7	
57	$b\ c$	$\beta\ \gamma$	10	
58	$a\ c$	$\alpha\ \gamma$	9	
59	$a\ b\ d\ e\ f$	γ	18	99
60	$a\ b$	$\alpha\ \beta$	3	
61	$a\ c\ d\ e\ f$	β	4	
62	$b\ c\ d\ e\ f$	α	14	
63	1	1	34	
計			330	330

今，I の a, b, c, d, e, f なる底に分解してその百分率を求めてみると第5表のようになり，各底元素の度数百分率にいちじるしいちがいはない。しかし，II の $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ らる底に分解してみるとその度数百分率（第6表）にはかなりいちじるしいちがいがある。すなわち，ζ が 23% で最高を占めているが，これは北海道のみ変化する場合で，前節の結果ともよく対応している。又，最底は δ，すなわち，関東地方のみ変るものであって，8% に過ぎない。この事実は a, b, c, d, e, f を底にとる表現が天気分布を分析するのに適当でないが，$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ による表現が適当しているだろうことを示している。そして，このことは物理的に予想されることである。このことは逆に物理的機構の分っていない現象に対してこの方法が有効であることを示していると考えられる。

第 5 表

I 型	a b c d e f	計
度数百分率	16 19 16 18 15 16	100

第 6 表

II 型	α β γ δ ε ζ	計
度数百分率	15 172 1 8 16 23	100

ここで，注意すべきは，第 5 表の方は，地域別の天気分布の特性に対応していないことである。たとえば，60 は a, b で表わされ，これは，

$$(-----+)\cdot(----+-)=(++++--)$$

で，積 $a\,b$ はすでに a の特性（九州が変化しない）を保有していないからである。このことは逆にこの底表示の方法で有意な因子をとりだすのにやく立つことを示している。

このようにして，気象現象のように複雑な現象を扱うのに群の底表示の扱い方の有効なことが分るであろう。

4. 剰余類の応用

一般に群 G の 1 つの定った元を α とし，G の部分群を H $(H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots\cdots)$ とするとき

$$H_1\alpha,\ H_2\alpha,\ H_3\alpha,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

の全体を

$$\mathrm{H}\alpha$$

とかいて，右剰余類といい，おなじように

$$\alpha H_1,\ \alpha H_2,\ \alpha H_3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

の全体を

$$\alpha\mathrm{H}$$

とかいて，左剰余類というのであるが，第 4 表の II をみると，00～07 のものは

$$\begin{array}{cccccc}
\alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\
 & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\
\alpha & & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\
 & & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\
\alpha & \beta & & \delta & \varepsilon & \zeta \\
 & \beta & & \delta & \varepsilon & \zeta \\
\alpha & & & \delta & \varepsilon & \zeta \\
 & & & \delta & \varepsilon & \zeta
\end{array}$$

でこれは明らかに

群 H $(\alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)$

に $\delta\zeta$ (=07) をかけたものであり，1 つの剰余類をつくっている。（アーベル群であるか

ら左右の別はない)。

同様に，08～15 は H・(εζ) ≡H・(15) であり他もおなじようである。表示すると，第7表のようになる。

第7表 剰余類の表

型	剰余類	度数
00 ～ 07	H・(07)	10
08 ～ 15	H・(15)	46
16 ～ 23	H・(23)	17
24 ～ 31	H・(31)	80
32 ～ 39	H・(39)	15
40 ～ 47	H・(47)	48
48 ～ 55	H・(55)	15
56 ～ 63	H・(63)	99

このようにして天気分布変化のオペレーターを分類して，群の剰余類と対応させることができる。第7表中，度数にいちじるしいちがいがあり，

H・(07), H・(23), H・(39), H・(55)

は平均14で，最低位を示し，

H・(15), H・(47)

平均47で中位を示し，

H・(31), H・(63)

は平均 90 で最高位を示し，不連続をなしていて，天気変化機構と結びついていることを示唆している。このことについては，後にまたくわしく論ずることにする。

今1つの場合を考えてみよう。1月の天気図を低気圧型 (L)，前線型 (F)，季節風型(K)，高気圧型 (H) の4つに分け，これに次のように数を対応させる。すなわち，

L：1 0 0 0

F：0 1 0 0

K：0 0 1 0

H：0 0 0 1

そして，ある型から他の型へ変るとき，数字の変った部分を－，変らない部分を＋で表わすと，すでに扱った天気分布変化の場合と同様に扱うことができる。変化のオペレーター7つ a, b, c, d, e, f, g を第8表のようにきめることにしよう。この7つのオペレータ

第 8 表

	L	F	K	H
L	a ＋＋＋＋	b －－＋＋	c －＋－＋	d －＋＋－
F	b －－＋＋	a ＋＋＋＋	e ＋－－＋	f ＋－＋－
K	c －＋－＋	e ＋－－＋	a ＋＋＋＋	g ＋＋－－
H	d －＋＋－	f ＋－＋－	g ＋＋－－	a ＋＋＋＋

ーに h：ーーーー を加えると，8位のアーベル群をつくることは明らかである。群表は第9表のようである。

第 9 表

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a							
b	b	a						
c	c	e	a					
d	d	f	g	a				
e	e	c	b	h	a			
f	f	d	h	b	g	a		
g	g	h	d	c	f	e	a	
h	h	g	f	e	d	c	b	a

ところで，(a, h) は1つの部分群であってこれを H とすると，容易に分るように，次の 3 つの剰余類がえられる。すなわち，$\mathrm{H}\cdot b$, $\mathrm{H}\cdot c$, $\mathrm{H}\cdot d$ である。

第 10 表

$\mathrm{H}\cdot b$	b, g
$\mathrm{H}\cdot c$	c, f
$\mathrm{H}\cdot d$	d, e

さて，1954～1964 の 11 年間における 1 月の速報天気図について，上のオペレーターの度数をしらべた結果は第 11 表のようである。表中，右の 4 列は，各天気図型について，各オペレーターのおこった度数を示したものである。たとえば，高気圧型 (H) の天気図に作用した元は a が 29 コ (32%), g が 10 コ (11%), f が 18 コ (20%), d が 33 コ (37%) あったことを示している。これによると，季節風型天気図がもっとも持続性があること，

第 11 表

元	度　数	H	L	F	K
a	127	29	18	27	53
b	29		13	16	
c	39	10			29
d	25		20		5
e	33	18		15	
f	44	33	11		
g	33			19	14
h	0				
計	330	90	62	77	101

低気圧型はもっとも持続性の小さいこと，などがわかる。また，たとえば d は L 型から K 型へ，あるいは K 型から L 型へのときにおこるが，L 型から K 型へのときは 32% (≒ 20/62) に達するが，K 型から L 型へのときは僅か 5% (≒ 5/101) にしかならないことを

示している。このようにして，この剰余類の表は有用であることがわかる。

5. 準同型の概念の応用

群における準同型の概念もまた有用である。たとえば，高層天気図と海面天気図とは一対一に対応しないが，準同型的対応をすることはすでに筆者が注意した(8)ところであるが，ここではすでにあげた第5表についてみてゆくことにする。

第 12 表

	番	号	底　表　示	度　数	度 数
A	00	08	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \zeta\ \varepsilon$	1+ 4= 5	56
	01	09	$\beta\ \gamma\ \varepsilon\ \zeta$	4+ 3= 7	
	02	10	$\alpha\ \gamma\ \varepsilon\ \zeta$	1+ 2= 3	
	03	11	$\gamma\ \varepsilon\ \zeta$	1+14=15	
	04	12	$\alpha\ \beta\ \varepsilon\ \zeta$	1+ 3= 4	
	05	13	$\beta\ \varepsilon\ \zeta$	1+ 3= 4	
	06	14	$\alpha\ \varepsilon\ \zeta$	0+ 8= 8	
	07	15	$\varepsilon\ \zeta$	1+ 9=10	
B	16	24	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \zeta$	2+ 5= 7	97
	17	25	$\beta\ \gamma\ \zeta$	3+12=15	
	18	26	$\alpha\ \gamma\ \zeta$	0+ 1= 1	
	19	27	$\gamma\ \zeta$	5+15=20	
	20	28	$\alpha\ \beta\ \zeta$	1+ 4= 5	
	21	29	$\beta\ \zeta$	2+10=12	
	22	30	$\alpha\ \zeta$	0+ 9= 9	
	23	31	ζ	4+24=28	
C	32	40	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \varepsilon$	3+ 4= 7	63
	33	41	$\beta\ \gamma\ \varepsilon$	3+ 5= 8	
	34	42	$\alpha\ \gamma\ \varepsilon$	1+ 5= 6	
	35	43	$\gamma\ \varepsilon$	2+ 7= 9	
	36	44	$\alpha\ \beta\ \varepsilon$	1+ 3= 4	
	37	45	$\beta\ \varepsilon$	2+ 8=10	
	38	46	$\alpha\ \varepsilon$	1+ 3= 4	
	39	47	ε	2+13=15	
D	48	56	$\alpha\ \beta\ \gamma$	3+ 7=10	144
	49	57	$\beta\ \gamma$	2+10=12	
	50	58	$\alpha\ \gamma$	2+ 9=11	
	51	59	γ	1+18=19	
	52	60	$\alpha\ \beta$	3+ 3= 6	
	53	61	β	2+ 4= 6	
	54	62	α	2+14=16	
	55	63	1	0+34=34	
計					330

(8) 渡辺次雄 (1953)：天気予報に群の概念を応用する可能性について，第224回綜合談話会。

まず，元 δ の度数は他の元にくらべていちじるしく少いから，これをとりのぞいて整理すると，第 12 表のようになる。これは，物理的には重要でない因子を無視したことであり，数学的には準同型な群との対応をつけたことにあたっている。

さらに，度数の少い ζ をとり去ってまとめると，第13表がえられる。

第 13 表

	番		号		底表示	度　　数	度 数
B*	00	08	32	40	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \varepsilon$	5+ 7=12	119
	01	09	33	41	$\beta\ \gamma\ \varepsilon$	7+ 8=15	
	02	10	34	42	$\alpha\ \gamma\ \varepsilon$	3+ 6= 9	
	03	11	35	43	$\gamma\ \varepsilon$	15+ 9=24	
	04	12	36	44	$\alpha\ \beta\ \varepsilon$	4+ 4= 8	
	05	13	37	45	$\beta\ \varepsilon$	4+10=14	
	06	14	38	46	$\alpha\ \varepsilon$	8+ 4=12	
	07	15	39	47	ε	10+15=25	
D*	16	24	48	56	$\alpha\ \beta\ \gamma$	7+10=17	211
	17	25	49	57	$\beta\ \gamma$	8+12=20	
	18	26	50	58	$\alpha\ \gamma$	6+11=17	
	19	27	51	59	γ	9+19=28	
	20	28	52	60	$\alpha\ \beta$	4+ 6=10	
	21	29	53	61	β	10+ 6=16	
	22	30	54	62	α	4+16=20	
	23	31	55	63	1	15+34=49	
計							330

このようにして，第5表，第12表，第13表をもとにして，物理的機構に対応する多くの準同型な群を考えることができる。否，このような準同型な群をとりだすことにより，これのもととなっている物理機構を吟味する手がかりをうることとなる。

たとえば，第13表において，B* に属する任意の二元の積は D* に属するが，このことを B*・B*=D* という表し方をすると，

$$B^* \cdot B^* = D^*$$
$$B^* \cdot D^* = D^* \cdot B^* = B^*$$
$$D^* \cdot D^* = D^*$$

と表わせる。いうまでもなく，完結した機構を考えるならば，D* だけがおこることは可能であるが，B* だけがおこることは不可能である。そこで，B* の 119 コと D* の 211 コの差 92 コは D* だけの生起によるものと推論することができる。このようにして，準同型の概念は有用であることが知られるのである。

6. 持続性の表現

今までの諸節でみてきたように，持続性は群の元と密接な関係がある。単位元は完全な持続を表わしていた。しかし，(++++) でなくても (+++−)，(++−+)，(+−++)，(−+++) も次位の持続性を表現するものとみることができる。これらを綜合して，天気分布変化における持続性の問題を論ずる必要がある。

従来一地点における天気の持続性については若干の研究がなされてきた。はじめてこれを論じたのは1871年 Köppen[9]であった。彼は天気を2種に分ち，その1つ雨天の確率を p とすると晴天の確率は $1-p$ で与えられ，したがって，雨天が n 日続く確率は $(1-p)^2p^n$ であることから，全 N 日中に n 日雨天が続く回数 N_n は $N\cdot(1-p)^2p^n$ で与えられることを示し，これを実況と比較したのである。しかし，この方法は定性的であり，二地点のそれをくらべることができなかった[10]。

その後，1930年，藤原咲平・中田良雄[11]はこれを定量化した。すなわち，雨天の確率を A，雨天の翌日がまた雨天である確率を B とするとき，

$$f_1=\frac{B}{A}$$

を天気持続係数と名づけた。もちろん，$f_1>1$ のとき持続性があり，$f_1=1$ なら持続性も反続持性もなく，$f_1<1$ なら反持続性がある。しかし，この方法には重大な欠陥がある。それは，雨天の持続係数と晴天の持続係数がまったくことなった年変化を示すことがある。これでは雨天や晴天の持続性を表わすものということはできない。

1932年，畠山久尚[12]は天気持続率なる概念を提出し，上の欠点をとりのぞくことができた。すなわち，天気の実際の平均継続日数を a，その天気のおこる確率から予期される平均持続日数を b として

$$F=\frac{a}{b}$$

とおくと，$F>1$, $F=1$, $F<1$ に従って，持続性あり，なし，反持続性あり，ということになるからである。しかし，この方法は2種の天気にしか使えなかった。これを n 種の天気に拡張する必要がある。この問題は1960年，筆者[13]が解決した。すなわち，n 種の天気 1, 2, 3, ……, n の天気日数を N_1, N_2, ……, N_n とし，そのグループ数をそれぞれ k_1, k_2, k_3, ……, k_n とするとき

$$F=\frac{n-1}{\dfrac{k_1}{N_1}+\dfrac{k_2}{N_2}+\cdots\cdots+\dfrac{k_n}{N_n}}$$

は綜合的天気の持続性を表わすもので，

$$F>1,\ =1,\ <1$$

に従って，天気に持続性あり，なし，反持続性あり，となる。さらに，筆者[14]は天気持続係数，天気持続率などの間の関係を吟味した。

ここでは，同じ思想にもとづいて，天気分布の持続性について考えてみることにする。

---

(9) Köppen, W. (1871): Petersburger Reportorum der Meteorologie, Bd. II.

(10) まったく同じ方法を日本にはじめて導入したのは中村精男である。中村精男 (1889): 数日間連続せる天気に就いて，気象集誌，第8年，445～454.

(11) Fujiwhara, S. and Y. Nakata (1930): On the Persistence of weather, Geophys. Mag., 3, 27～34.

(12) 畠山久尚 (1932): 天気の持続性について，気象集誌，II, 10, 453～459；中央気象台彙報，6, 53～59.

(13) 渡辺次雄 (1960): 天気の持続性について，天気，7, 207～211.

(14) 渡辺次雄 (1960): 天気の持続性について (補遺)，天気，7, 346～348.

（I） 藤原・中田の方法の拡張

藤原咲平・中田良雄が提出した方法を直接拡張することは容易である。すなわち，たとえば，≪北海道のみ晴天，他は雨天である≫という天気分布の持続係数を求めるには，この天気分布，仮に W_{100000} の確率 A_{100000} を求め，次に天気分布 W_{100000} の翌日，また W_{100000} となる確率 B_{100000} を求め

$$f_{100000}=\frac{B_{100000}}{A_{100000}}$$

を決めればよい。しかし，この方法は地区を 6 地区に分けて $2^6=64$ 通りの場合について1つ1つ持続係数を決めなければならないばかりでなく，天気分布そのものの持続性を表わすものということはできない。

（II） 畠山の方法の拡張

畠山の方法は天気分布の持続に対して直接拡張することは不可能である。というのは，地区を 2 地区に分け，天気を 2 種に分けただけで 4 つの場合を生ずるからである。しかし，筆者の方法を直接適用することは可能である。

（III） 筆者の方法の適用

今仮りに天気を 2 種，地域を 2 地区に分けて天気分布を考えると 4 つの場合ができる。これを仮りに

$$W_{11}\,,\ W_{10}\,,\ W_{01}\,,\ W_{00}$$

としよう。そして，天気分布 W_{ij} ($i,\ j=1$ あるいは0) の日数を N_{ij} とし，そのグループ数を k_{ij} とすると

$$F=\frac{3}{\dfrac{k_{11}}{N_{11}}+\dfrac{k_{10}}{N_{10}}+\dfrac{k_{01}}{N_{01}}+\dfrac{k_{00}}{N_{00}}}$$

は天気分布の持続性を表わすもので F が 1 より大か，等しいか，小なるかに従って，持続性あり，なし，反持続性あり，ということになる。一般に，天気を n 種，地域を m 地区に分けたときは，天気分布は n^m コの場合ができる。これを $W_{i_1i_2\ldots i_m}$ ($i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m=0,\ 1,\ \cdots,\ n$) とし，その日数を $N_{i_1i_2i_3\ldots i_m}$，グループ数を $k_{i_1i_2\ldots i_m}$ とすると

$$F=\frac{n^m-1}{\sum\dfrac{k_{i_1i_2\ldots i_m}}{N_{i_1i_2\ldots i_m}}}$$

とおくことにより，

$$F>1\,,\ =1\,,\ <1$$

に従って持続性あり，なし，反持続性あり，ということになる。但し，ここに $\sum$ は $i_1i_2\cdots i_m$ のすべての組合せに対しての和を表わすものとする。これで，一般に n 種の天気，m 地区の天気分布について，天気持続率を拡張することができた。

しかし，これにも欠点がある。それは，個々の天気あるいは天気分布を独立に扱っていることである。すなわち，晴から雨になったのも晴から曇になったのもその変化したという点では同等にみているし，天気分布の場合でも，1地区のみ変化したときと，2地区変化したときとを，ひとしく天気分布の変化として平等に扱っていることである。この画一的取扱いを一歩前進させる方法は天気変化あるいは天気分布変化を表わすオペレーターに≪ある立場よりする≫重み (weight) を附与することである。このようにして，持続性の問題を，変化を表わすオペレーターの吟味の上に組立てる必要がでてくるのである。

7. 持続性とオペレーター

本節ではまず，天気を２種に分けたときの１地点におけるオペレーターの系列から持続性をしらべることを考えよう。

毎日の天気を晴天○と雨天●に分けたとき，十分長い期間の資料があれば，天気が

○から○へとつづく確率 $=p_{11}$

○から●へとかわる確率 $=p_{21}$,

●から○へとかわる確率 $=p_{22}$,

●から●へとつづく確率 $=p_{12}$

を決めることができる。もちろん

$$p_{11}+p_{21}=1,\quad p_{12}+p_{22}=1$$

である。

今これをマトリックスで表わして

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

とすると，転置マトリックスは

$$P'=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

で与えられ，従って，

$$PP'=\begin{pmatrix} p_{11}^2+p_{12}^2 & p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11}+p_{22}p_{12} & p_{21}^2+p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

となり，積マトリックスの (1, 1) 元 $p_{11}^2+p_{12}^2$ は ○→○→○ および ●→●→● となる確率すなわち，オペレーターが ＋＋ とつづく確率を表わす。次に，(1, 2) 元 $p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22}$ は ○→○→● および ●→●→○ となる確率すなわち，オペレーターが ＋－ とつづく確率を表わし，同様にして，(2, 1) 元はオペレーターが －＋ とつづく確率，(2, 2) 元は －－ とつづく確率を表わす。

従って，今オペレーターの系列から，相続く２コづつをとって，＋＋，＋－，－＋，－－ の個数を求め，その生起確率をそれぞれ，q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} とすると，

$$PP'=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

をといて，p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} を算出することができ，これから，晴天の確率 p_1 および雨天の確率 p_2 をそれぞれ次式から決められる。

$$p_1=\frac{p_{22}}{p_{21}+p_{22}},$$

$$p_2=\frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}}.$$

従って晴天の持続係数 f_1 は

$$f_1=p_{11}\Big/\frac{p_{22}}{p_{21}+p_{22}}$$

$$=P_{11}\left(1+\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)$$

で与えられ，雨天の持続係数は

$$f_2 = p_{12} \Big/ \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}} = p_{12}\left(1+\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)$$

で与えられる。f_1, f_2 が決められれば，天気持続率や天気のエントロピーを算出できることはすでに報告したところである。

そこで，この方式を n 種の天気，m 地区の天気分布の持続性の吟味に≪形式的に≫適用することを提案したいと考える。すなわち，たとえば，4種の天気 ○（快晴），⦶(晴)，◎（曇），●（雨）に分けて扱うとき，第14表のようなオペレーターを採用するとしよう。

第 14 表

前＼後	○	⦶	◎	●
○	+	+	−	−
⦶	+	+	+	−
◎	−	+	+	−
●	−	−	−	+

このようにしてえられたオペレーター ＋，− の系列について逆に仮想的二種の天気についての持続性を吟味するのである。

おなじように6区の天気分布の場合にも，たとえば第 15 表のようなオペレーターを採用することができる。すなわち，第4表の底表示を用いて，α, β, γ, δ, ε, ζ のうち，1つだけ，2つだけ，…… で表示されるものを同種とみなすのである。表中 O_1 は (α, β, γ, δ, ε, ζ) を，O_2 は ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, ……, $\varepsilon\zeta$) を，O_3 は ($\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, ……, $\delta\varepsilon\zeta$) を，………，

第 15 表

前＼後	O_0	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_0	+	+	−	−	−	−	−
O_1	+	+	+	−	−	−	−
O_2	−	+	+	+	−	−	−
O_3	−	−	+	+	+	−	−
O_4	−	−	−	+	+	+	−
O_5	−	−	−	−	+	+	+
O_6	−	−	−	−	−	+	+

O_6 は ($\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$) を表わすのである。$O_0$ は1（番号63のもの）を表わしている。このようにして，持続性の吟味にも群の概念を応用することができる。

8. あとがき

以上，気象学上の問題に群論を適用する可能性について論じて来た。実は， 10 年前の1954年にこれを論じたことがあるが，実際上の問題に本格的に適用することはその手数の点から不可能に近かった。しかし，今では電子計算機の発達と普及により，必らずしも不

可能ではなくなってきたので，若干の新しい観点から問題を見直して論じたのである。最後に資料の整理について手伝っていただいた東京理科大学気象部の学生のみなさんに深く謝意を表する。