不可欠プレイヤーを持つ本質的凹ゲームの仁とShapley 値の一致性について

横　田　宏　治

概　要

本稿では、横田（2023）において考察した不可欠プレイヤーを持つゲームに、本質的凹性と限界利得合理性を加えると、プレイヤー数を無限大にしたとき、仁とShapley 値が一致することを示す。このゲームにおいては、プレイヤー数を無限大にした場合にも辞書的順序がうまく定義されるので、仁は問題なく求められる。この解を賃金交渉に適用すると、Stole and Zwiebel（1996a, b）に代表されるような多人数二人交渉の解とは違って、価値関数の凹性の度合にかかわらず、労働者の賃金価値が労働の限界価値をつねに下回る。

キーワード：TU 協力ゲーム、不可欠プレイヤー、本質的凹性、仁、Shapley 値、賃金交渉

1　はじめに

この研究ノートは、本紀要前号の「不可欠プレイヤーを持つ大ゲームのShapley 値」の続編である。前号の大ゲームで得られたShapley 値で与えられる解が、本質的凹性と限界利得合理性の追加的な条件の下で、仁として求められることを示す。

大ゲームへの考察には長い歴史がある。非協力ゲームでの大ゲームの初期の貢献としては、純粋戦略Nash 均衡が連続個の無名なプレイヤーの下で存在することを示したSchmeidler（1973）が挙げられる。比較的最近では、Kalai（2004）が、多数のsemi-anonymous なプレイヤーの下で、同手番ゲームが逐次ゲームへの拡張に頑健であることを示した。Carmona and Podczeck（2009）は、過去の異なる大ゲームの定式化が互いに同一であることを示した。Salonen（2010）は、プレイヤーの数が一般に非可算個を許容する非空集合であり、効用函数が、非空で可測コンパクトな戦略空間上で連続である場合、混合戦略Nash 均衡が存在することを示した。繰り返しゲームについて、Green（1980）とSabourian（1990）は、プレイヤーが無限小の場合、一定の条件下ではステージゲームでのNash 均衡だけが部分ゲーム完全均衡になり得ることを指摘した。

協力ゲームの大ゲームについては多くが知られている。1974年時点でのサーベイとしてAumann and Shapley（1974）がある。不可算プレイヤーゲームのコアについては、Kannai（1969）やSchmeidler（1972）、Azoff and Bird（1979）による結果がある。また、Schmeidler（1969）の仁に関しては、不可算プレイヤーに

拡張する上では、辞書式順序を用いた定義では一般に都合が悪いことが知られている。Bird（1976）は、有限プレイヤーでこれと同値な定義が、不可算プレイヤーのケースにも同値性を維持して拡張できることを示し、仁の存在と唯一性が保証されるゲームのクラスを提示した。最近では、Kurz et al.（2014）が、Peleg（1968）の重み付き多数決ゲームにおいて、プレイヤー数を無限大としたとき、各プレイヤーのウェイトが質量的でないならば、各プレイヤー間の配分の比は、ウェイトの比に等しいことを示した。

本稿で考察しているモデルと極めて深い関係があるモデルとしては、Shitovitz（1982）が、大トレーダーと連続トレーダーのいる生産経済において、連続トレーダーが搾取される構造を導き出している。また、Wooders and Zame（1987）は、εコアが大ゲームにおいて極めて小さくなるという結果を得ている。

Shapley 値と仁が一致するような結果については、Chun and Hokari（2007）が待ち行列問題について成立することを示している。

2　不可欠プレイヤーを持つ本質的凹型大ゲーム

交渉解をより大きなモデルの一部に組み込もうとする場合、交渉解はなるべく少ない数、できれば唯一解になるように留めたい。そのような解の候補としては、Shapley 値の他に仁が挙げられる。本節では、生産過程の生み出した付加価値の分配を行う際の交渉解を考える上で適切な仮定の下に、仁を構成する。横田（2023）において、労使交渉をモデル化するに当たり、Shapley 値を導き出すのに用いた要素は、以下の六つの仮定であった。変数の定義は横田（2023）で与えたものを用いる。以下において煩雑さを避けるため、ベクトル等の要素を表す添え字は明示的に変数として与えることがある。たとえば、$s(i)$はs_iと同値であり、$s_i(j)$はs_{ij}と同値である。

横田（2023）と同様に、プレイヤーは、nとは独立なM個の職能等を表す属性グループ（集合）のいずれかに属し、それらのグループの集合を$\mathscr{S} := \{S_i\}_{i\in I}$で表すものとする。ここで、$I = \{1, \ldots, , M\}$は属性グループのインデックスの集合とし、$M \geq 2$と仮定する。この仮定は、企業体を構成するためには、被雇用者から成る職能グループだけでは不十分であり、雇用政策も含めた意思決定を担う職能グループが必要とされるとの見方を反映している。S_iの要素はnに依存するが、Iはnに対し不変とする。また、$\{S_i\}_{i\in I}$は$\Omega^{(n)}$の分割であるので、$\Omega^{(n)} = \sum_{i\in I} S_i$である。これらの属性グループは、さらに「労働者族」$\mathscr{W}$に属するか、または下記に定義する不可欠性を有する「管理者族」$\mathscr{M}$のいずれかの集合族に、排他的に必ず属するものとする。インデックスは、必要があれば番号を振り直して、前者のインデックス集合が$I_w = \{1, \ldots, m\}$、後者のそれが$I_m = \{m+1, \ldots, M\}$となるようにする。すると$I = I_w + I_m$であり、$\mathscr{W} = \{S_i\}_{i\in I_w}$かつ$\mathscr{M} = \{S_i\}_{i\in I_m}$である。$i$番目のグループのプレイヤー数は、$N_i^{(n)} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$であるものとし、$J_i^{(n)} = \{1, \ldots, N_i^{(n)}\}$をそのグループに属するプレイヤーのインデックスとする。i番目のグループのj番目のプレイヤーは、s_{ij}というシンボルで表す($i \in I$, $j \in J_i^{(n)}$)。また、特性関数を$v : 2^{\Omega^{(n)}} \to \mathbb{R}$で表すものとする。

この提携型ゲームに、賃金交渉の特性を反映した、以下の仮定を置く。

仮定 1（本質的ゲーム）．ゲームは本質的であ

る。すなわち、$v(\Omega) > \sum_{s\in\Omega} v(\{s\})$ を満たし、全提携による利得は、個別利得の総和よりも大きい。

仮定２（グループ内無名性）．同一グループに属するプレイヤーは、帰属する任意の提携の特性関数の値に関して無名性を持つ。すなわち、任意の $S \subseteq \Omega^{(n)}$ と、任意の $i \in I$ および $j \neq h$ なる任意の $j, h \in J_i^{(n)}$ に関して

$$v(S) - v(S \setminus \{s_{ij}\}) = v(S) - v(S \setminus \{s_{ih}\})$$

である。また、同一の属性グループに属するプレイヤーの測度は、互いに等しい。

仮定３（不可欠性）．$\mathscr{M}$ に属するプレイヤーが１人でも欠けるか、任意のグループが１つでも欠けると、提携は本質性を失う。すなわち、

(a)　与えられた $S \subseteq \Omega^{(n)}$ に対して、もし $S \cap S_i^n \neq S_i^n$ であるような $i \in I_m$ が存在するか、

(b)　$S \cap S_i^n = \emptyset$ であるような $i \in I$ が存在するならば、$v(S) = \sum_{s\in S} v(\{s\})$ となる。このような非本質的な提携族を

$$\mathscr{O} := \{S : (\exists i \in I, S \cap S_i^n = \emptyset) \vee (\exists i \in I_m, S \cap S_i^n \neq S_i^n)\} \tag{1}$$

と定義することにする。

上記の要件でもって定義される提携型ゲームの集合を $G_1(\Omega^n, v)$ と表すことにする。これは、以下に考察するゲームのうち、最も一般的なクラスである。いま、このゲームの列

$$\eth_1 := \{G_1(\Omega^n, v)\}_{n=2}^{\infty}$$

を考える。このゲームの列について、以下の仮定を置く。

仮定４（フィルトレーション）．任意の $n \in \mathbb{N}$, $i \in I, j \in J_i^{(n)}$ に関して、$s_{ij} \in S_i^{(n)}$ ならば $s_{ij} \in S_i^{(n+1)}$ である。

仮定５（与えられた提携測度）．任意の属性グループ S_i は、n とは独立に、与えられた有界な測度 $l_i \in [0, \infty)$ を持つ。

仮定６（質量族の存在）．n とは独立に、$\emptyset \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$ なる $\mathscr{M}$ の部分集合 $\mathscr{A}$ が存在し、$S_i \in \mathscr{A}$ ならば $N_i(n)$ は有界、$S_i \in \mathscr{A}^c$ ならば $\lim_{n\to\infty} N_i(n) = +\infty$ である。

仮定６は $\mathscr{A} = \emptyset$ を許容している。

横田（2023）で求められた Shapley 値を求めるにあたり、全体提携の限界利得に関する仮定が置かれている一方で、部分提携の利得に関する仮定は加えられていない。これは、全体提携を構成する人数が増えるにしたがって、全体提携への「最後の貢献者」としての役割のみが確率１で評価されるに至ることから、部分提携の利得は解に関与しなくなるためである。一方、交渉解として仁を採用しようとすると、可能な各提携の超過を比較することが必要になることから、価値関数の形状について特定化することが必要となる。

そこで、横田（2023）のゲームのクラスに、さらに追加的な仮定を置いたゲームを考える。ここで加えられる仮定は、生産関数および価値関数の収穫逓減の性質を反映したものである。凸ゲームの定義を踏襲して凹性を定義しているが、特性関数が大域的に強く凹である場合、任意の部分集合に対するゼロ単調性が失われ、ゲームが本質的でなくなるので、凹性は２人以上の提携についてのみ適用されることとして本質性を維持している。このような凹性を、本質性を維持するような（部分的かつ強い）凹性という意味で、以下では本質的凹性と呼称する。一般的には、凹性を満たすならば、本質的凹性は満たされる。その一方で、本質性と凹性は両立しないが、本質性と本質的凹性は両立する。

仮定 7（本質的凹性）. 特性関数 v について、もし S, T が $\emptyset \subsetneq S \subsetneq T \subsetneq \Omega^{(n)}$ であるならば、任意の $s \in \Omega \setminus T$ に対して $v(S \cup \{s\}) - v(S) > v(T \cup \{s\}) - v(T)$ である。

次の仮定は、全てのプレイヤーにインセンティブ互換性を満たすような配分を行うことが、そのプレイヤーを除いた提携に損失を与えることなく可能であることを保証する。

仮定 8（限界利得合理性）. 任意の $i \in I$, $j \in J_i^{(n)}$ について $v(\Omega) - v(\{s_{ij}\}^c) \geq v(\{s_{ij}\})$ である。

明らかに、ゲームがゼロ単調性を満たせば、限界利得合理性を満たす。逆に、ゲームが限界利得合理性と本質的凹性を満たせば、ゼロ単調性を満たし、したがって弱優加法性を満たす。G_1 の満たす仮定に加えて、上記二つの仮定を満たすようなゲームを $G_2(\Omega^n, v)$ と表すものとし、その列を $\partial_2 := \{G_2(\Omega^n, v)\}_{n=2}^{\infty}$ と定義する。

補題 9. $G_1(\Omega^n, v)$ がゼロ単調性を満たすとき、$G_1(\Omega^n, v)$ のコアは非空である。また、$G_2(\Omega^n, v)$ のコアは非空である。さらに、仮定 7 を満たす $G_1(\Omega^n, v)$ のクラスにおいて、仮定 8 はコアが非空になるための必要十分条件である。

証明　前半の命題から始める。プレイヤー $s \in \mathscr{W}$ のプレイヤーに $\iota(s)\,\mathrm{d}l = v(\{s\})$ を割り当て、プレイヤー $s \in \mathscr{M}$ に残余 $\iota(s)\,\mathrm{d}l = [v(\Omega) - \sum_{s \in \mathscr{W}} v(s)] / \|I_m\| \geq v(\{s\})$ を割り当てる配分を考える。このような配分は、ゲームの本質性により実現可能である。任意の $S \in \mathscr{O}$ に対して、$\sum_{s \in S} \iota(s)\,\mathrm{d}l \geq v(S) = \sum_{s \in S} v(\{s\})$ であるので、この配分は提携合理性を満たす。また、任意の $S \in \mathscr{O}^c$ に対しても、ゼロ単調性により $\sum_{s \in S} \iota(s)\,\mathrm{d}l = v(\Omega) - \sum_{s \notin S} v(s) \geq v(S)$ であるので、この配分は提携合理性を満たす。このゲームは、優加法性を満たすので、提携合理性を満たすならば、この配分はコア内に存在する。

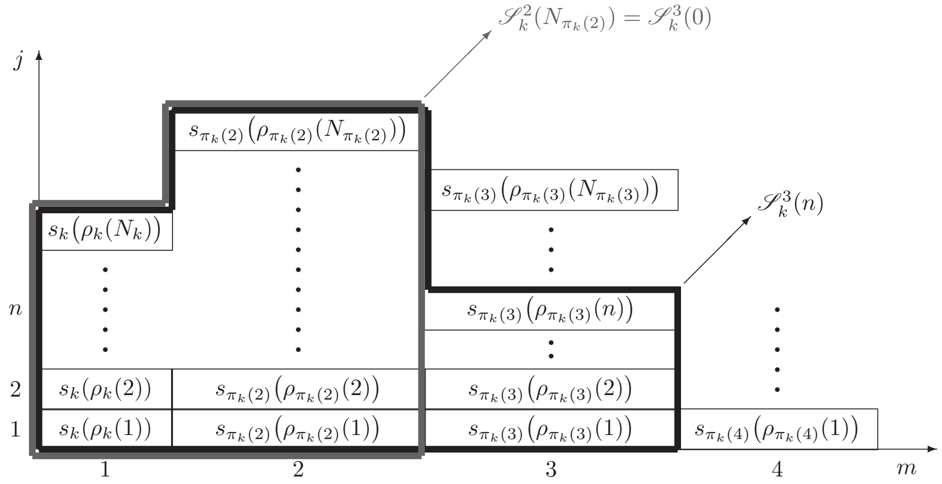
命題の後半について、G_2 が本質的凹性と限界利得合理性を持つことから、ゼロ単調性を満たす。G_2 は G_1 の特殊ケースであることから、本命題前半の結果により G_2 のコアは非空である。次に、仮定 7 を満たす $G_1(\Omega^n, v)$ のクラスにおいて仮定 8 が十分条件であることを示す（必要条件は、必要条件を満たすこのクラスが G_2 に属することから証明済み）。ある $i \in I$, $j \in J_i^{(n)}$ について、限界利得合理性が成り立たないものとする。すなわち、$v(\Omega) - v(\Omega \setminus \{s_{ij}\}) < v(\{s_{ij}\})$ であるとする。s_i 以外のプレイヤーの提携合理性は $\sum_{s \in \Omega \setminus \{s_{ij}\}} \iota(s) \geq v(\Omega \setminus \{s_{ij}\})$ を要求するから、全体合理性により

$$
\begin{aligned}
\iota(s_{ij}) &= v(\Omega) - \sum_{s \in \Omega \setminus \{s_{ij}\}} \iota(s) \\
&\leq v(\Omega) - v(\Omega \setminus \{s_{ij}\})
\end{aligned}
$$

を意味する。上記の仮定とこれを合わせると、$\iota(s_{ij}) \leq v(\Omega) - v(\Omega \setminus \{s_{ij}\}) < v(\{s_{ij}\})$ となり、s_{ij} の個人合理性 $\iota(s_{ij}) \geq v(\{s_{ij}\})$ を満たさないことから、コアは空となる。このことから、コアが非空ならば、限界利得合理性が成り立つ。

補題の最後は、$G_1(\Omega^n, v)$ のクラスにおいて、ゼロ単調性はコアが非空となるための必要十分条件であるということもできる。これを、企業の生産活動に当てはめれば、生産の限界価値が外部オプションの価値よりも大きいことが、コアが存在するための必要十分条件となる。生産過程においては、コアが空であれば、少なくとも一人のプレイヤーが提携から離脱するので、企業が生産を行っているような最適経路においては、生産の限界価値が外部オプションの価値を上回っていると考えて良い。

補題10. $\partial_2(\Omega^n, v)$ においては、任意の $j \in S_i^{(n)}$ と $S \subset T$ であるような任意の $S, T \subseteq \Omega$ に関し



（備考）　各プレイヤー $s \in S$ をグループを横軸、グループ内各メンバーを縦軸に並べた模式図である。たとえば、黒い太線で囲った範囲が $\mathscr{S}_k^3(n)$（$n \in \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N_{\pi_k(3)}\}$）であり、灰色の太線で囲った範囲が $\mathscr{S}_k^2(N_{\pi_k(2)})$ すなわち $\mathscr{S}_k^3(0)$ となる。$\pi_k(1) = k$ であることに注意。また、任意の m, n に対して $\mathscr{S}_k^m(n) \supseteq \mathscr{S}_k^1(\min\{n, N_k\})$ である。

図 1：$\mathscr{S}_k^m(n)$ の定義

て

$$\begin{aligned} & v(T) - v(T \setminus S) \\ & \geq \sum_{i=1}^{M} \|S \cap S_i\| \left[v(T) - v\left(T \setminus \{s_{ij}\}\right) \right] \end{aligned}$$

が成立する。

証明　任意の $i \in I$ に対して $N_i := \|S \cap S_i\|$ と定義する。$v(T) - v(T \setminus S)$ の値は、T から S の要素を逐次的に取り除いたとき、その順序にかかわらず不変であるという事実を用いる。π_k を k から始まる $\{1, \ldots, M\}$ の任意の置換とし、ρ_i を $\{1, \ldots, N_i\}$ の任意の置換とする（$i = 1, \ldots, M$）。$1 \leq n \leq N_{\pi_k(m)}$ に対して、$\mathscr{S}_k^1(n)$ を $\mathscr{S}_k^1(n) := \bigcup_{j=1}^{n} \{s_k(\rho_k(j))\}$ と定義し、再起的に

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_k^m(n) := {} & \mathscr{S}_k^{m-1}(N_{\pi_k(m-1)}) \\ & \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n} \left\{ s_{\pi_k(m)}(\rho_{\pi_k(m)}(j)) \right\} \right] \end{aligned}$$

とする。表記の便宜上、n の定義域を $0 \leq n \leq N_{\pi_k(m)}$ に拡張し、連番の整合性のために $\mathscr{S}_k^m(0) = \mathscr{S}_k^{m-1}(N_{\pi_k(m-1)})$（$m \geq 2$）および $\mathscr{S}_k^1(0) = \emptyset$ と定義する。この表記に従えば、$T = T \setminus \mathscr{S}_k^1(0)$ および $T \setminus S = T \setminus \mathscr{S}_k^M(N_{\pi_k(M)})$ である。すると、任意の与えられた $m \in \{1, \ldots, M\}$ について

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_{\pi_k(m)}} \left[v\left(T \setminus \mathscr{S}_k^m(n-1)\right) - v\left(T \setminus \mathscr{S}_k^m(n)\right) \right] \\ & > N_{\pi_k(m)} \left[v\left(T \setminus \mathscr{S}_k^m(0)\right) - v\left(T \setminus \mathscr{S}_k^m(1)\right) \right] \\ & \geq N_{\pi_k(m)} \left[v\left(T\right) - v\left(T \setminus \left\{ s_k\left(\rho_k(j)\right) \right\}\right) \right] \end{aligned}$$

である。$v(T \setminus \mathscr{S}_k^1(0)) = v(T)$ および $v\left(T \setminus \mathscr{S}_k^1(1)\right) = v\left(T \setminus \left\{s_k\left(\rho_k(j)\right)\right\}\right)$ であることに注意。1 行目と 2 行目の不等号は本質的凹性の仮定から導かれる。すなわち、任意の $m = 1, \ldots, M$ と $n_1 > n_2$ なる $n_1, n_2 = 1, \ldots, N_{\pi_k(m)}$ に対して $\mathscr{S}_k^m(n_1) \supseteq \mathscr{S}_k^m(n_2)$ であるから $T \setminus \mathscr{S}_k^m(n_1) \subseteq T \setminus \mathscr{S}_k^m(n_2)$ であり、$\mathscr{S}_k^m(n_1) \supseteq \mathscr{S}_k^1(n_1)$

であるから $T \setminus \mathscr{S}_k^m(n_1) \subseteq T \setminus \mathscr{S}_k^1(n_1)$ であることによる。ここから

$$\begin{aligned} &v(T) - v(T \setminus S) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N_{\pi_k(m)}} \Big[v\big(T \setminus \mathscr{S}_k^m(n-1)\big) \\ &\qquad\qquad - v\big(T \setminus \mathscr{S}_k^m(n)\big)\Big] \\ &> \sum_{m=1}^{M} N_{\pi_k(m)} \left[v(T) - v\big(T \setminus \{s_k(\rho_k(j))\}\big)\right] \end{aligned}$$

となる。

この補題は、通常の強い凹函数について成立する性質 $f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) < f_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}\Delta x_n$ の拡張である。

いま、$\iota \in \prod_{i=1}^{M} \mathbb{R}^{N_i}$ を利得ベクトルとし、$e(S, \iota)$ を利得が ι のときの提携 S の超過であるとする。すなわち $e(S, \iota) := v(S) - \sum_{s \in S} \iota(s)$ である。また、最小コアにおける超過を ε と表記するものとする。次の補題は単純である。

補題11.　S が $\varepsilon = \min_\iota \max_S e(S, \iota)$ を満たすならば $\varepsilon = e(S^c, \iota)$ である。

証明　超過 ε を容認した提携合理性は $\varepsilon \geq e(S^c, \iota)$ であるから、仮に $\varepsilon = e(S^c, \iota)$ でない、すなわち $\varepsilon > e(S^c, \iota) = v(S^c) - \sum_{s \in S^c} \iota(s)$ であるものとしよう。ある $s' \in S^c$ と $s'' \in S$ をとって、あらたな配分 ι^* を全体合理性が維持されるように（すなわち $1 \cdot \iota^* = v(\Omega)$ となるように）

$$\begin{cases} \iota^*(s') = \iota(s') - \frac{\varepsilon - e(S^c, \iota)}{2} & (s' \in S^c) \\ \iota^*(s'') = \iota(s'') + \frac{\varepsilon - e(S^c, \iota)}{2} & (s'' \in S) \\ \iota^*(s) = \iota(s) & (\forall s \in S, s \neq s', s'') \end{cases}$$

と取る。すると、$e(S, \iota^*) < \varepsilon$ かつ $e(S^c, \iota^*) < \varepsilon$ を満たす。これは S が $\varepsilon = \min_\iota \max_S e(S, \iota)$ を満たすことに反する。よって命題が得られる。

定理12.　任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ について、$G_2(\Omega^n, v)$ において $i \in I_w$ かつ $j \in J_i$ なる任意の s_{ij} に対して

$$\iota(s_{ij})\,\mathrm{d}l = \frac{v\big(\{s_{ij}\}\big)}{2} + \frac{v(\Omega) - v\left(\Omega \setminus \{s_{ij}\}\right)}{2} \qquad (2)$$

を割り当て、$i \in I_m$ かつ $j \in J_i$ なる任意の s_{ij} に対して

$$\begin{aligned} &\iota(s_{ij})\,\mathrm{d}l = v(\{s_{ij}\}) \\ &\quad + \frac{v(\Omega) - \int_{s \in \mathscr{W}} \iota(s)\,\mathrm{d}l - \sum_{s \in \Omega^{(n)}} v(\{s\})}{\sum_{i \in I_m} \|S_i\|} \end{aligned} \qquad (3)$$

を割り当てる配分は仁である。

証明　$G_2(\Omega^n, v)$ はゼロ単調であるので、$n < \infty$ のとき、仁は辞書的中心に一致する。ただし、$n = \infty$ の場合は、$n \to \infty$ とするときの v に規則性がない限りは、一般的には辞書的順序をうまく定義することができない。以下では、この点に留意しつつ、いったん辞書的順序がうまく定義できるものと仮定して、辞書的中心を構成し、その有効性を検証する。

i^* を最大超過を持つ提携を含む S_i の番号であるものとすると、辞書的中心を定義するアルゴリズムの各段階における縮小ゲームにおいて、最小コアが $\forall j \in S_i^*$ が張る部分空間内で単点集合となることを示す。Maschler et al.（1979）において辞書的中心を定義するアルゴリズムの初期値を

$$X^0 := \{\iota \in \mathbb{R}^n : 1 \cdot \iota = v(\Omega^n)\}$$

$$\mathscr{C}^0 := \{S \subsetneq \Omega^n : S \neq \emptyset\}$$

とし、各再帰的ステップ $k = 1, 2, \ldots, \kappa$ を

$$\varepsilon^k := \min_{\iota \in X^{k-1}} \max_{S \in \mathscr{C}^{k-1}} e(S,\iota) \tag{4}$$

$$X^k := \left\{ \iota \in X^{k-1} : \max_{S \in \mathscr{C}^{k-1}} e(S,\iota) = \varepsilon^k \right\} \tag{5}$$

$$\mathscr{C}_k := \left\{ S \in \mathscr{C}^{k-1} : e(S,\iota) = \varepsilon^k, \forall \iota \in X^k \right\} \tag{6}$$

$$\mathscr{C}^k := \mathscr{C}^{k-1} \setminus \mathscr{C}_k \tag{7}$$

と定義する。κ は $\min_{k\in\mathbb{N}} \left\{k : \mathscr{C}^k = \emptyset\right\}$ である。

いま、上記で定義されるステップ k にある場合、すなわち $(X^{k-1}, \mathscr{C}^{k-1})$ が既知である場合を考える。任意の $S \in \mathscr{C}^{k-1}$ を取り上げよう。$S \in \mathscr{O} \cap \mathscr{C}^{k-1}$ ならば、$v(S,\iota) = \sum v(\{s_i\},\iota)$ であるので、$e(S,\iota) = \sum_{h=1}^{M} \|S \cap S_h\| \, e(\{s_{hj}\},\iota)$ である。補題 9 によりコアは非空であるので、$e(S,\iota)$ および $e(\{s_{hj}\},\iota)$ は、最小コア中の ι に対し非正であり、$S \in \mathscr{O} \cap \mathscr{C}^{k-1}$ に対して

$$e(S,\iota) \le \min_{h \in I : S \cap S_h \neq \emptyset} e(\{s_{hj}\},\iota) \tag{8}$$

となる。つぎに、$S \in \mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1}$ の場合を考える。補題10における T を Ω^n、同じく S をここでの S^c と置けば、任意の $S \subset \Omega^n$ と $j \in S^c \cap S_i$ に対して

$$\begin{aligned} & v(\Omega^n) - v(S) \\ & = v(\Omega^n) - v(\Omega^n \setminus S^c) \\ & \ge \sum_{i=1}^{M} \|S^c \cap S_i\| \left[v(\Omega^n) - v(\{s_{ij}\}^c) \right] \end{aligned}$$

となる。ここから

$$v(S) \le \sum_{i=1}^{M} \|S^c \cap S_i\| \left[v(\{s_{ij}\}^c) - v(\Omega^n) \right] + v(\Omega^n)$$

となるので、両辺から $\sum_{s\in S} \iota(s)$ を引くと

$$\begin{aligned} & v(S) - \sum_{s\in S} \iota(s) \\ & \le \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{J_i^n} I(S^c) \left[v(\{s_{ij}\}^c) - v(\Omega^n) \right] + \sum_{s \in S^c} \iota(s) \\ & = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{J_i^n} I(S^c) \left[v(\{s_{ij}\}^c) - v(\Omega^n) + \iota(\{s_{ij}\}) \right] \\ & = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{J_i^n} I(S^c) \left[v(\{s_{ij}\}^c) - \iota(\{s_{ij}\}^c) \right] \end{aligned}$$

であるので

$$e(S,\iota) \le \sum_{i=1}^{M} \|S^c \cap S_i\| \, e(\{s_{ij}\}^c)$$

となる。ここで $I(\cdot)$ は

$$I(T) = \begin{cases} 1 & s_{ij} \in T \text{ の場合} \\ 0 & s_{ij} \notin T \text{ の場合} \end{cases}$$

と定義するインデックス関数である。超過が非正であることを用いれば、$S \in \mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1}$ に対して

$$e(S,\iota) \le \min_{i \in I} e(\{s_{ij}\}^c, \iota) \tag{9}$$

となる。ここで $j \in S^c \cap S_i$ であるから $\{s_{ij}\}^c \in S \cap S_i$ である。

(8)(9)式により、(5)式において最小コアを構成する $S^* = \arg\max e(S,\iota)$ は

$$S^* \in \Big\{ \{s_{hj}\} \cup \{s_{ij}\}^c : \forall h,i,j \text{ s.t.} \\ i \notin I_m \text{if } \mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1} \neq \emptyset \Big\} \subset \mathscr{C}^{k-1}$$

に限定される。ここで、$\mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1} \neq \emptyset$ のとき $i \notin I_m$ であるのは、次のような理由による。すなわち、ある $i' \in I_m$ をとると $\{s_{i'j}\}^c \in \mathscr{O}$ であるので、ある $S' \in \mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1}$ が存在するならば、その S' に対して $v(\{s_{i'j}\}^c) = \sum_{i\in I} \sum_{j \in J_{i'}^{(n)}} v(\{s_{ij}\}) < v(S')$ となるためである。よって

$\{s_{i'j}\}^c \notin S^*$。これは$\mathscr{W} \cap \mathscr{C}^{k-1} \neq \emptyset$、すなわち労働者族が$\mathscr{C}^{k-1}$に残っているかぎり、管理者族は$\mathscr{C}^{k-1}$から取り除く候補とはならないことを示している。

いま、ステップkにおいて、$\mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1} \neq \emptyset$であることを仮定する。補題11を用いれば、ある$i, j$が$\{s_{ij}\} \in S^*$を満たすならば$\{s_{ij}\}^c \in S^*$であり、$\{s_{ij}\}^c \in S^*$を満たすならば$\{s_{ij}\} \in S^*$である。すなわち、上式において$h = i$とおき、$i \in I_w$に限定して構わない。したがって、$i^* \in I_w$を最大超過を達成する$i$、$\iota^*$をそれを最小化する$\iota$を表すものとして、任意の$j \in S_{i^*}$に関して$\varepsilon^k = e(\{s_{i^*j}\}, \iota^*) = e(\{s_{i^*j}\}^c, \iota^*)$となる。配分における全体合理性を用いて、これを$\iota^*(s_{i^*})$と$\varepsilon$について解けば、

$$\varepsilon^k = -\frac{v(\Omega) - v\big(\{s_{i^*j}\}\big) - v\big(\{s_{i^*j}\}^c\big)}{2} \tag{10}$$

を得ることができ、任意の$j \in S_i$について

$$\iota(s_{i^*j})\mathrm{d}l = \frac{v(\Omega) - v\big(\{s_{i^*j}\}^c\big) + v\big(\{s_{i^*j}\}\big)}{2} \tag{11}$$

となることがわかる。また、任意の$j \in J_{i^*}^{(n)}$について$\{s_{i^*j}\}, \{s_{i^*j}\}^c \in \mathscr{C}_k$であり、$(\mathscr{O}^c \setminus \{s_{i^*j}\}^c) \cap \mathscr{C}_k = \emptyset$である。このステップ$k$において、$J_{i^*}^{(n)}$に属するすべてのプレイヤーの配分が定まるが、これは(10)および(11)式に見るように、グループi^*に属するプレイヤーの「限界生産性」$(v(\Omega) - v(\{s_{i^*j}\}^c)$と「外部オプション」$v\big(\{s_{i^*j}\}\big)$によって規定されるので、$N_i^{(n)} \to \infty$と取ったときにも同様に定まる。

一方、ステップkにおいて、$\mathscr{O}^c \cap \mathscr{C}^{k-1} = \emptyset$であるものとすると、$\mathscr{W}$の要素はすでに$\mathscr{C}^{k-1}$からすべて取り除かれているので、任意の$S \in \mathscr{C}^{k-1}$について$e(S, \iota) = \sum_{s \in S} e(\{s\}, \iota(s)) \leq \max_{s \in S} e(\{s\}, \iota(s)) \leq 0$となる。すなわち、最小コアは単点提携$\{s\}$の集合のみで特徴付けられる。よって

$$v(\{s_{ij}\}) - \iota^*(s_{ij}) = \varepsilon^k, \forall i \in I_m,\ j \in J_i^{(n)}$$

であるから、$\sum \iota^*(s_{ij}) = \sum v(\{s_{ij}\}) - \sum_{i \in I_m} \|S_i\| \, \varepsilon^k = v(\Omega) - \sum_{i \in I_w} \iota^*(s_{ij})$。したがって

$$\varepsilon^k = \frac{\sum v(\{s_{ij}\}) - \big[v(\Omega) - \sum_{i \in I_w} \iota^*(s_{ij})\big]}{\sum_{i \in I_m} \|S_i\|}$$

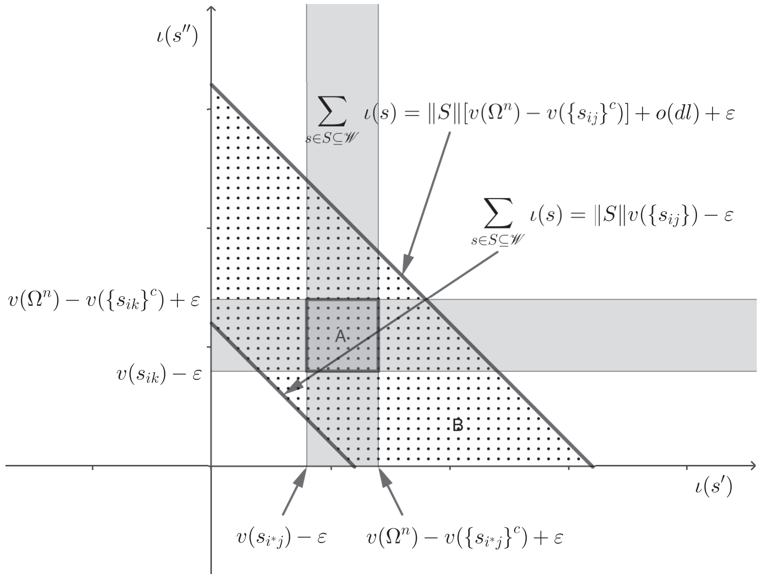
および(3)を得る。

なお、各再帰的ステップkにおいて、任意の提携Sに対する大小関係(9)は、任意の$n \geq 0$に対して成立するため、$n \to \infty$と取った場合でも、kの辞書的順序はうまく定義される。

定理12において、労働者族のみからなる提携Sとその補集合が形成するεコアの境界の位置関係を見ると解釈が容易である。管理者族は、生産性がすべてのプレイヤーが提携に入るか否かに依存するので、あたかも管理者族全体で単一のプレイヤーであるかのように取り扱える。すると、上記のようなSとS^cを考えることで、εコアのすべての境界の候補を考慮に入れることができる。図2は労働者族に属するプレイヤーs'およびs''の利得が張る平面へのこの境界の射影である。影を付けたすべての領域の共通部分がεコアとなるが、単一プレイヤー$\{s'\}$または$\{s''\}$からなる提携およびその補集合の提携合理性が形成する領域の共通部分Aは、それ以外の提携とその補集合の提携合理性が形成する領域Bに、任意の$\varepsilon \leq 0$に対して含まれる。このことからεコアおよび最小コアを考えるに当たっては、領域Aのみを考慮に入れれば良いことになる。

横田（2023）の結果を合わせれば、次のように要約される。

定理13. $G_2(\Omega^\infty, v)$において、$i \in I_w$かつ$j \in J_i$なる任意のs_{ij}に対して(2)式で表される



単一の労働者族プレイヤーからなる提携とその補集合が形成する領域が ε コアを形成し、その他の提携は ε コアの境界の形成に関与しない。図中 S は 2 プレイヤー以上の労働者族を含む提携で $s', s'' \in S$ である。本質的凹性により $o(\mathrm{d}l) > 0$ である。任意の $\varepsilon \leq 0$ に対して、図中 $A \subset B$ が成立する。

図 2：労働者族が張る平面への ε コアの射影

割り当てを行い、$i \in I_m$ かつ $j \in J_i$ なる任意の s_{ij} に対して(3)式で表される割り当てを行う配分は、Shapley 値でありかつ仁である。

証明　定理12と横田（2023）における定理 9 の系として、直ちに導かれる。

3　摩擦的労働市場に直面する企業の賃金交渉

ここでは $\eth_2(\Omega^n, v)$ のクラスに属するもののうち、生産関数もしくはそこから導かれる価値関数によって表記されるような典型的な企業が、摩擦的労働市場に直面して行う賃金交渉ゲームを考える。生産関数の背後には、株主もしくはその他の所有者が保有する企業体が、1 つの統合された実体として、各種労働者や資本等の生産資源を雇用して生産と分配を行うための最適な意思決定ができるという想定があると考えることができる。$\eth_2(\Omega^n, v)$ では、企業と労働者の区別は曖昧でも構わなかったが、ここで考えるゲームのクラスでは企業の範囲を明示する必要がある。伝統的な生産関数を用いた企業の定式化では、企業は潜在的に現時点以降の雇用政策を含めた意思決定を行う主体であり、生産関数に含まれる各種生産資源の雇用を決定する。生産関数に変数として含まれる各生産要素は、意思決定に参画するという意味で企業体の一部である可能性はあるが、すくなくともその雇用の去就は企業体の統一された意思決定に従う。その一方で、生産関数に含まれない主体は $\Omega^{(n)}$ の中に少なくとも 1 つ存在しなくてはならない。第 2 節の結果によれば、典型的に労働者に関して強く凹関数となるような生産関数の下では、生産関数の変数として表されるような限界的な影響しか持たないプレイヤーに分配を行った後、残余分が厳密に正の量だけ発生す

る[1)]。これを受け取る主体が、生産関数にリストアップされている生産要素以外に必要である。定理12および定理13によれば、残余分を受け取る主体は $\mathscr{M}$ に属するので、$\mathscr{M}$ もしくは $\mathscr{M}$ の空でない一部を企業の範囲として考えるのが、自然であると考えられる。

ここでは最も単純なケースとして $\|I_m\| = 1$ を想定する。グループ内無名性によって、任意の提携 S は、その集合に含まれる属性グループの人数によって、特性関数が同じ値を与える同一クラスに分類することができる。そこで、同一クラス内の提携を同一視して、各属性グループからの参加者が $n_i = \left\| S_i^{(n)} \cap S \right\|$ であるとき、その特性関数を $v(S) = v(n_1 \mathrm{d}l_1, \ldots, n_M \mathrm{d}l_M)$ のように表すこととする。I_w 内の各グループごとの測度を異なるものとする必然性はないので、$\mathrm{d}l_1 = \mathrm{d}l_2 = \cdots = \mathrm{d}l_m =: \mathrm{d}l$ とする。$i \in I_w$ グループの測度を $l_i := n_i \mathrm{d}l$ と表記することにし、$U \in \mathbb{R}_+$ を失業の価値を表す定数であるものとする。また、F を増加凹関数として、特性関数を以下のように特定する。このように特定化したゲームを $\partial_3(\Omega^n, v)$ と表記することにする。

$$
v(l_1, \ldots, l_m, l_{m+1}) = \begin{cases} U \sum_{i=1}^{M} l_i & (\exists i \in I,\, S \cap S_i = \emptyset \\ & \text{または } l_{m+1} = 0) \\ F(l_1, \ldots, l_m) & (\text{その他の場合}) \end{cases} \tag{12}
$$

ここでは、限界利得条件は、任意の i について、$l_i' \uparrow l_i$ と取ったとき、$\partial F / \partial l_i \geq U$ であるものとして表される。この特性関数が導かれる摩擦的労働市場モデルは、たとえば Yokota (2018) で用いたものが想定しうる。

概要は以下のようなものである。労働者は失業状態と就業状態の2つがあり、失業状態からは就職活動を経て、労働市場の vu 比率に依存したマッチ率 $\mu(\theta)$ で就業状態に遷移する。一方、就業状態からは自然分離率 σ で失業状態に遷移する。失業状態の価値関数を U、就業状態の価値関数を E で表すことにすると、これらの価値関数は以下の関係を満たす。

$$
\beta E = w - \sigma (E - U) + \dot{E}
$$

$$
\beta U = b + \mu(\theta) (E - U) + \dot{U}
$$

ここで β は労働者の割引率、b は失業状態の効用の金銭的評価（失業手当等の評価も含む）、w は賃金、変数上のドットは時間微分を表す。家計は、以上の労働状態の遷移を前提とした上で、最適な消費／貯蓄計画を立案する。企業は摩擦的労働市場に直面しているため、労働雇用の調整は瞬時に行うことができない。雇用の調整は、採用活動の成果として雇用量の変化率を通して行われる。採用活動自体も生産関数で表されるもう一つの生産活動として捉えられ、独自のリソース投入を必要とする。したがって、雇用量 $l = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}_+^m$ は産出物生産部門での雇用 $\hat{l} = (\hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_m) \in \mathbb{R}_+^m$ と採用部門での雇用 $\tilde{l} = (\tilde{l}_1, \ldots, \tilde{l}_m) \in \mathbb{R}_+^m$ に配分され、資本 $k \in \mathbb{R}_+$ も同様に生産物生産部門への投入 $\hat{k} \in \mathbb{R}_+$ と採用部門への投入 $\tilde{k} \in \mathbb{R}_+$ に分けられる。両生産活動を表す生産関数は、産出物生産部門が $f(\hat{l}, \hat{k})$、採用部門が $g(\tilde{l}, \tilde{k})$ で表されるものとし、通常の想定に従う。とくに両関数は収穫一定に従う凹関数である。労働雇用の調整は

1) これは $n < \infty$ の下で仁として成立する。横田（2023）によれば、$n \to \infty$ とすれば凹関数の仮定7を与えなくても、同様の性質が Shapley 値として成立する。

瞬時には行えない[2)]ので、企業の利潤最大化は瞬時的な問題として取り扱うことはできず、将来にわたる異時点間の利潤価値を最大化することが目的となる。すなわち、企業の労働調整は、企業の意図的な瞬時解雇量 $x \geq 0$ を許容すれば

$$\dot{l} = g(\tilde{l}, \tilde{k}) - \sigma l - x$$

となる。企業も潜在的には操業状態と休業状態の間を遷移し、前者の価値関数を F、後者のそれを V と表すと

$$\tilde{\beta} F(l^*, k^*) = f(\hat{l}^*, \hat{k}^*) - wl^* - rk$$
$$- \sigma^n \left(F(l^*, k^*) - V\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(l^*, k^*)$$
$$\tilde{\beta} V = b + \theta\mu(\theta)\left(F(l^*) - V\right) + \dot{V}$$

と表される。ここで、$\tilde{\beta}$ は企業の将来割引率、アスタリスクの付いた変数は最適経路上にあることを表す。$n \to \infty$ においては、企業は休業状態にはほぼ確実に遷移しないので、操業状態の価値関数は、ほぼ確実に（almost surely）

$$F(l, k) = \max_{l, \hat{l}, \tilde{l}, x, k} \int_0^\infty \left(f(\hat{l}_t, \hat{k}_t) - w_t l_t - r_t k_t\right) \mathrm{e}^{-\tilde{\beta} t} \mathrm{d}t$$

であるものと単純化され、各選択変数は $l, \hat{l}, \tilde{l}, x, k \geq 0$ および $\hat{l}, \tilde{l} \leq l$ なる制約に従う。この経済においては、雇用関係にある主体の間にレントが発生するので、実質賃金は交渉によって定まり、労働市場の需給関係では直接に決定されない。どの企業も瞬時的調整を為し得ない環境下で、ある時点において（次の瞬間の経済状態の予想を巡る）瞬時Nash均衡に達しているとき、次の瞬間に経済全体の均衡所得の動きに反して、企業が生産を増やせるかどうかは議論が必要である。Yokota（2018）の第2－C節で論じられているところでは、生産物市場が差別化されている場合には、y を市場が予想している次の瞬間の生産水準であるものとすると、$f(\hat{l}, \hat{k}) \leq y$ という数量制約が追加的にかかる。

以上のような摩擦的労働市場モデルでの賃金交渉は、企業と労働者の将来割引率の違いから、一般的にはNTU（non-transferrable utility）ゲームの枠組みでの分析を必要とする。しかしながら、NTUゲームで本稿と同じような分析を行うと、得られる結果はたいへん煩雑なものとなる。そこで、ここでは、

$$\tilde{\beta} = \beta + \sigma \tag{13}$$

とおいてTUゲームでの枠組みが適用可能な特殊例を考える。一般的には、労働者が危険回避的で、企業は危険中立的と想定することが多い。これに従えば、going-concernであることを仮定する企業において、⒀式の仮定には難がある。これを解消する一つの方法は、企業はけっして永続的ではないと仮定することである。実際の企業の倒産確率を見れば、going-concernを仮定するよりもこちらの方が実際的である。Thompson（2005）が使用した1世紀近くにわたる造船産業のデータでは、操業100年を超える企業もある一方で、操業期間の平均は10.2年に過ぎなかった。Headd（2003）によれば、4年以上操業を続けることができる新規企業は半分ほどしかいない。また、横田

2）この採用活動の定式化によって、実質的に採用費用関数は凸型となる。線形費用関数のようにbang-bang制御を行うことは最適ではないので、初期時点ですべての雇用調整を行って定常状態に達することはない。したがって、常時定常状態外にあることになるが、すべての企業が瞬時に調整を行うことができないならば、最終的に到達に向かうべき定常状態は、存在するとすれば他の企業の行動に依存する。

(2022) において指摘したとおり、競争的資本市場と摩擦的労働市場から生産手段を調達する企業は危険回避的となるので、この面からも $\tilde{\beta} > \beta$ は許容され、⒀式の仮定は少なくとも特殊例として成立しうると考えられる。

定理14. $\partial F/\partial_{-} l^i$ を l^i に関する左偏微分とする。$\eth_3(\Omega^n, v)$ において

$$E^i = \frac{1}{2}\left(U + \frac{\partial F}{\partial_{-} l^i}\right) \tag{14}$$

$$J = F - \sum_i E^i \tag{15}$$

で与えられる配分は仁であり、$\eth_3(\Omega^\infty, v)$ においては仁であるとともに Shapley 値である。

証明　この結果は横田 (2023) における定理 9 と本稿の定理12からしたがう。後者については、F から導かれる特性関数が本質的凹性を満たすことを示せば十分である。F は凹関数であるので、$l^1 > l^2$ なる l^1, l^2 に関して $\partial F(l^1)/\partial l \,\mathrm{d}l \le \partial F(l^2)/\partial l \,\mathrm{d}l$ である。すると $F(l^1 + \mathrm{d}l) - F(l^1) \le F(l^2 + \mathrm{d}l) - F(l^2)$ が成立するので、F から導かれる特性関数は本質的凹性（仮定 7）を満たす。

4　多人数二人間交渉との関係

前節で得られた結果は、Stole and Zwiebel (1996a, b) に代表される多人数二人間交渉とは、解の表現において大きな違いがある。本稿では全体利得の限界分が解に現れるのに対し、多人数二人間交渉の場合は、全体利得の積分が交渉解に現れる。これは、Stole and Zwiebel (1996a, b) においては、企業に労働者が複数雇用されているものの、賃金交渉は企業と 1 労働者の間で行われることが前提されているためである。複数の労働者の賃金は、仮想的に 1 人ずつ雇用していったときの各段階での 1 対 1 交渉の積み上がりであり、雇用の各ステップにおいては、各労働者は総雇用数がいかに多くとも縮退しない交渉力を持つ。Stole and Zwiebel (1996b) を本稿の文脈に翻訳し、チルダ付き変数を多人数二人間交渉の際の解を表すものとすれば

$$\tilde{E}^i = \frac{U}{2} + \frac{1}{l^2}\int_0^l [F(l) - F(s)]\,\mathrm{d}s$$

$$\tilde{J} = \frac{1}{l}\int_0^l [F(s) - Us]\,\mathrm{d}s$$

のようになって、1 労働者の退職の影響は、それがどんなに微細であっても再帰的に企業価値に影響を及ぼす [3)]。

いま、F が累乗で表されるクラスの凹関数であるものとする。すなわち $F(l) = Al^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ とすると、多人数二人間交渉の解における労働者への配分 $\tilde{E}^i$ は

$$\tilde{E}^i = \frac{U}{2} + \frac{F'(l)}{1+\alpha}$$

となり、任意の提携が可能な交渉における

3) Stole and Zwiebel (1996b) の離散系の労働者利得をここでの変数を使って表すと、外部オプション U を用いて

$$\tilde{E}^i = \frac{1}{l(l+1)}\sum_{s=0}^{n} s\,\Delta F(s) + \frac{1}{2}U$$

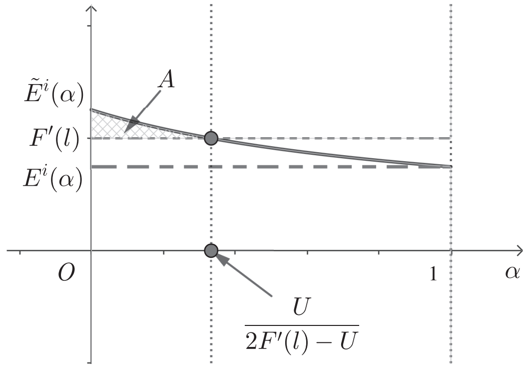
となる。これは、$\pi(l) = F(l) - Ul$ を用いて別の表記で表せば

$$\tilde{E}^i = U + \frac{1}{l\,(l+1)}\sum_{s=0}^{n}(\pi(l) - \pi(s))$$

あるいは

$$\tilde{E}^i = \frac{U}{2} + \frac{1}{l\,(l+1)}\sum_{s=0}^{n-1}(F(l) - F(s))$$

と表すことができる。本文中で用いているのは、この最後の表記を連続系に対して適用した場合である。



多人数二人間交渉における労働者の利得 $\tilde{E}^i$ は F の凹性の度合 α に依存し、$0<\alpha<U/[2F'(l)-U]$ の領域において、限界全体利得 $F'(l)$ を上回る（図中の領域 A）。任意の提携を考慮した場合においては、F の凹性の度合に関わらず、E^i は一貫して $F'(l)$ を下回る。

図３：多人数二人間交渉においては F の凹度が分配に影響

Shapley 値および仁での労働者への配分 E^i は

$$E^i=\frac{U}{2}+\frac{F'(l)}{2}$$

となる。$0<\alpha<1$ のとき、$1/(1+\alpha)>1/2$ であるから、つねに $E^i<\tilde{E}^i$ である。すなわち、多人数二人間交渉における労働者利得は、任意の提携が可能な交渉の場合をつねに上回る。また、多人数二人間交渉の場合の配分は、F の凹性に依存するところが特徴的である。なかでも、α が十分小さく $(0<\alpha<U/[2F'(l)-U])$ F の凹性が強いとき、$\tilde{E}^i>F'(l)$ となって、労働者の利得が限界全体利得を上回ることがある。雇用人数を減らしていったときに労働者の限界価値が高い部分があると、それが現行の労働者の交渉力に正の影響を与えるためである。一方、任意の提携を許容した場合には、個人合理性が満たされる限り、労働者の利得が限界価値を超えることは起こり得ない。

5　おわりに

労働市場が摩擦的である場合、企業を構成するプレイヤーが現在と将来にわたる生産量に対して、限界的な貢献しか持たないか、非連続的な貢献を持つかに依存して、賃金決定の原理は異なってくる。限界的な貢献しか持たないプレイヤーは、その限界価値と失業したときの利得価値の平均しか得られない。一般的に失業時の価値の方が限界価値より低いので（そうでなければ労働者は企業を退職しているはずである）、このようなプレイヤーは、企業への自身の貢献よりも低い価値しか報酬として受け取れない。さらには失業率が増えて⒁式中における失業の価値 U が低下すれば、これらのプレイヤーの報酬は低下する。一方、企業に対して、非連続的な貢献を為し得るプレイヤーは、限界的貢献しか為し得ない労働者への賃金支払いを行った後の残余分の分配を受け取ることができる。

労働者の能力の違いによって、自らの貢献分よりも、より多くを受け取れる側に回れるか、その逆になるかが決まるという結果は、倫理的に正当でないという議論を引き起こしがちである。実際、企業への貢献分よりも低い報酬しか支払われない状態を、価値観のこもった伝統的用語を躊躇せずに用いて搾取と呼ぶならば、こ

こで得られた結果は、古くはMarx（1867）の搾取論に類似している。この結果はすでにShitovitz（1982）において見られたところである。ただし、ここではMarxの云うところの資本家とは違って、残余分への請求権を持つプレイヤーは、生来の階級に属する必要はなく、企業に非連続的な貢献をなし得る能力があれば十分である。また、分配の決定に影響を与えるのは、プレイヤー間の交渉力であって、労働の再生産に必要な費用は交渉力を通じた間接的な形でしか影響しない。一方、労働市場に摩擦が存在する下では賃金は価値ベースで決定されるので、Yokota（2005）やYokota（2012）に示されているように、外生的な変動があるときには、生産と賃金の動きは同期せずタイムラグが生じる。そのことの資本蓄積に与える影響が、既に19世紀の同書に指摘されているのは興味深い（Marx（1867）第1巻第23章）。

本稿で得られた結果に反して、分配における効率性を回復するためには、累進課税や資本課税と云った政策が候補に挙がるが、これらの政策は交渉に織り込まれてしまえば、実効性を持たない。分配政策に頼るよりは自助による対策、あるいはそれを促進する政策を行うべきであろう。その結果、労働者族の存在自体が数量的に稀少となれば、「限界的な貢献しか持たないプレイヤー」としてモデル化されるべき存在はいなくなるものと考えられる。これは、当該プレイヤーが能力面での対応を為し得ない場合でも、他に対応しうるプレイヤーが相当数いれば起こりうる。

非連続的貢献をなし得るプレイヤーの定式化については、ここで行ったものとは異なるさまざまな派生が考えられる。それに応じて、残余分への請求権の様態は変わってくることに注意が必要である。本稿および横田（2023）においては、管理者族を一律に不可欠プレイヤーとして定義したが、プレイヤーの離脱が利得0に導かないようなものとして定義することは可能である。たとえば、芸術的製品の生産技術を独占する創業者が不意に退職すれば生産活動が停止するかもしれない。しかし、事業部長の突然の退職は混乱をもたらすかもしれないが、生産活動の完全な停止には至らないだろう。すると、事業部長の退職は数パーセントの非連続的な生産減として定式化できるかもしれない。このような場合、定式化のしかたによっては、本稿の結果と類似の状況となって、管理者族の間での分配が貢献度合いに比例的となる点のみが異なるような結果が得られることもあるが、一方でコアが存在しなくなることもある。この場合には、管理者族の分配については、別の結果となることがある。

一方、限界的な貢献しか持たないプレイヤーが存在するという想定は、同一企業内に類似のプレイヤーが複数いて、収穫逓減の法則が働くという仮定が背後にある。これが該当する技術的部分は、伝統的製造業においては比較的多くを占めると考えられる一方で、創造的活動が製品に直結するような企業においては少なくなるものと考えられる。

参考文献

Aumann, Robert J. and Lloyd S. Shapley（1974）*Values of Non-Atomic Games,* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Azoff, Edward and Charles Bird（1979）“On the Formation of Coalitions in Infinite Player Games,” *Journal of Mathematical Economics,* 6(2), 203–213.

Bird, Charles（1976）“Extending the Nucleolus to Infinite Player Games,” *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 31(3), 474–11.

Carmona, Guilherme and Konrad Podczeck（2009）“On the Existence of Pure-Strategy Equilibria in Large Games,” *Journal of Economic Theory,* 144(3), 1300–1319.

Chun, Youngsub and Toru Hokari（2007）“On the Coincidence of the Shapley Value and the Nucleolus in Queueing Problems," *Seoul Journal of Economics,* 20(2), 223-237.

Green, Edward J. (1980) "Noncooperative Price Taking in Large Dynamic Markets," *Journal of Economic Theory,* 22(2), 155-182.

Headd, Brian (2003) "Redefining Business Success: Distinguishing Between Closure and Failure," *Small Business Economics,* 21(1), 51-61, 10.1023/A:1024433630958.

Kalai, Ehud (2004) "Large Robust Games," *Econometrica,* 72(6), 1631-1665.

Kannai, Yakar (1969) "Countably Additive Measures in Cores of Games," *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 27(2), 227-240.

Kurz, Sascha, Stefan Napel, and Andreas Nohn (2014) "The Nucleolus of Large Majority Games," *Economics Letters,* 123(2), 139-143.

Marx, Karl (1867) *Das Kapital,* Verlag von Otto Meisner,（邦訳）カール・マルクス『資本論』（大月書店）1968年 .

Maschler, M., B. Peleg, and L.S. Shapley (1979) "Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus, and Related Solution Concepts," *Mathematics of Operations Research,* 4(4), 303-338.

Peleg, Bezalel (1968) "On Weights of Constant-Sum Majority Games," *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 16(3), 527-532.

Sabourian, Hamid (1990) "Anonymous Repeated Games with a Large Number of Players and Random Outcomes," *Journal of Economic Theory,* 51(1), 92-110.

Salonen, Hannu (2010) "On the Existence of Nash Equilibria in Large Games," *International Journal of Game Theory,* 39(3), 351-357.

Schmeidler, David (1969) "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 17(6), 1163-1170.

——— (1972) "Cores of Exact Games, I," *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 40(1), 214-225.

——— (1973) "Equilibrium Points of Nonatomic Games," *Journal of Statistical Physics,* 7(4), 295-300, 10.1007/BF01014905.

Shitovitz, Benyamin (1982) "Some Notes on the Core of a Production Economy with Some Large Traders and a Continuum of Small Traders," *Journal of Mathematical Economics,* 9(1-2), 99-105.

Stole, L. A. and J. Zwiebel (1996a) "Intra-Firm Bargaining under Non-binding Contracts," *Review of Economic Studies,* 63, 375--410.

——— (1996b) "Organizational Design and Technology Choice under Intrafirm Bargaining," *American Economic Review,* 86(1), 195-222.

Thompson, Peter (2005) "Selection and Firm Survival: Evidence from the Shipbuilding Industry, 1825-1914," *The Review of Economics and Statistics,* 87(1), 26-36.

Wooders, Myrna Holtz and William R Zame (1987) "Large Games: Fair and Stable Outcomes," *Journal of Economic Theory,* 42(1), 59-93.

Yokota, Koji (2005) "Counterclockwise Behavior around the Beveridge Curve," in Namatame ed. *The Complex Networks of Economic Interaction:* Springer Verlag.

——— (2012) "Time Discount and Convex Hiring Cost," CBC Discussion Paper 147, Otaru University of Commerce, Otaru, Japan.

——— (2018) "Optimal Employment in Frictional Business Cycles and Intertemporal Discontinuity of Demand Duals and Production," Discussion Paper 42, School of Economics, Meisei University, Tokyo.

横田　宏治 (2022) " 保健衛生部門における賃金水準の妥当性について —資本コストの効率性による評価—," 明星大学経済学研究紀要 , 54(1), 29-41.

——— (2023) " 不可欠プレイヤーを持つ大ゲームの Shapley値," 明星大学経済学研究紀要 , 54(2), 57-68.