

気体流出公式についての一考察

森下悦生¹ 野本拓海²

Gas Discharge Formula Revisited

Etsuo MORISHITA¹, Takumi NOMOTO²

A gas leakage formula is derived in a closed analytical form. Leakage from a nozzle is well known and the mass flow rate is expressed as a function of density, velocity and the cross sectional area. In this note, gas leakage from a gas tank is modeled aerodynamically. A steady isentropic flow from a nozzle is assumed, together with quasi-steady isentropic and isothermal expansions in the gas tank. It is interesting to note that the mass flow equation can be integrated in analytical forms for particular values of the specific heat of the gas including air. The formula is compared to the preliminary gas leakage experiment.

キーワード：気体力学，熱力学，ノズル，圧縮性，

Keywords：Gas dynamics, Thermodynamics, Nozzle, Compressibility

1. はじめに

気体貯気槽のノズルからの流出について、従来知られている解に加えて、新たな解析解を求めた。流体の流出問題については、水槽からの流出をベルヌーイの式に基づく速度から求める問題がよく知られている。本メモは、同じような問題を気体にあてはめたもので、圧縮性流体のノズルを通過する等エントロピ流の質量流量が、貯気槽の質量減少に等しいことから、気体流出の解析解を求めている。貯気槽内は準静的な可逆断熱変化、すなわち等エントロピ変化、あるいは等温変化を仮定する。空気の比熱比などの場合、解析解が得られることを示している。

2. 気体の流出解

2.1 臨界条件の既知解

貯気槽内の気体の質量を $m = \rho_0 V$ とすると、

$$\frac{dm}{dt} = -\rho u A \quad (1)$$

ここで、 A はノズル断面積、 t は時間、 u はノズル出口における気体流速、 V は貯気槽容積、 ρ_0 は貯気槽密度、 ρ はノズル出口における気体の密度であり^{(1),(2),(3)}、

$$\dot{m} = -A \cdot \gamma \frac{p_0}{a_0} \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (2)$$

ここで、 a_0 は貯気槽音速、 p_0 は貯気槽圧力、 M はノズル出口マッハ数、 γ は気体の比熱比である。 $p = p_{\text{exit}} (> p_{\text{atm}})$ を外気圧以上のノズル端圧、 $*$ を音速条件として、流出中

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)_* = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3)$$

の臨界圧力比を継続する $M = 1$ では、(2) 式の解析解が知られている⁽⁴⁾。貯気槽で等エントロピ膨張を仮定した場合、

$$t = \frac{V}{A a_{00}} \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left[\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (4)$$

等温膨張を仮定した場合、

$$t = \frac{V}{A a_{00}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \ln \frac{1}{\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)} \quad (5)$$

ここで、添字 00 は初期値を表しており、

$$p_0 = p_0(t), \quad p_{00} = p_0(0) \quad (6)$$

である。(4) 式が実験値に近く、膨張後半で (5) 式に接近する傾向が知られている⁽⁴⁾。

2.2 亜臨界の解析解

$M < 1$ の亜臨界の場合、貯気槽の等エントロピ膨張を仮定すると、(2) 式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_0}{p} \right) = -K \sqrt{ \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} } \quad (7)$$

$$K \equiv \frac{Aa_{00}}{V} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \quad (8)$$

ここで、 p はノズル出口圧力 p_{exit} で、この場合は外気圧 p_{atm} に等しく一定値である。

空気の場合について、 $\gamma = 1.4$ であり、

$$f \equiv \frac{p_0}{p} = \frac{p_0(t)}{p}$$

とすると、(7) 式は、

$$\frac{df}{\sqrt{f^{\frac{6}{7}} - f^{\frac{4}{7}}}} = -K dt$$

$$K = \frac{Aa_{00}}{V} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{1}{7}}}$$

積分して (Mathematica© : γ のいくつかの値で積分可)、

$$t_{\text{end}} = \frac{V}{Aa_{00}} \frac{\sqrt{5}}{8} f^{\frac{1}{7}} \left[f^{\frac{1}{7}} \left(2f^{\frac{2}{7}} + 3 \right) \sqrt{f^{\frac{2}{7}} - 1} + 3 \ln \left(\sqrt{f^{\frac{2}{7}} - 1} + f^{\frac{1}{7}} \right) \right] \quad (9)$$

(9) 式は、初期圧力比 f が亜臨界の場合の膨張時間 t_{end} を

表している ($p = p_{\text{exit}} = p_{\text{atm}}$)。

貯気槽の等温膨張を仮定した場合

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_0}{p} \right) = -L \sqrt{ \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} } \quad (10)$$

$$L = \frac{Aa_{00}}{V} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (11)$$

$\gamma = 1.4$ では、

$$\frac{df}{\sqrt{f^{\frac{4}{7}} - f^{\frac{2}{7}}}} = -L dt$$

となるので、

$$t_{\text{end}} = \frac{V}{Aa_{00}} \frac{7\sqrt{5}}{75} \left(3f^{\frac{4}{7}} + 4f^{\frac{2}{7}} + 8 \right) \sqrt{f^{\frac{2}{7}} - 1} \quad (12)$$

(9)、(12) 式は空気の場合なので、

$$1 \leq f = \frac{p_0}{p} = \frac{p_0}{p_{\text{exit}}} = \frac{p_0}{p_{\text{atm}}} \leq \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{6}{5} \right)^{\frac{7}{2}} \approx 1.89$$

3. 実験との比較

図1に、(4)、(5)、(9)、(12) 式を合わせて示す。図1において、 t_{end} は空気貯気槽の初期圧力が $p_0 = p_{00}$ から周囲大気圧 $p_0 = p_{\text{atm}}$ まで低下するのに要する時間、 t_c は、

$$t_c \equiv \frac{V}{Aa_{00}} \quad (13)$$

で定義される特性時間である。体積 V の気体が、断面積 A のノズルから、一定流速 a_{00} で流出するのに要する仮想的な時間に相当する。無次元時間 t/t_c に対して圧力比を表示すれば、実験器具の諸元に依存しない評価が可能である。図1は、圧力低下の時間変化にも相当する。

図1から、貯気槽において、等温変化 ($dT=0$, isothermal) を仮定した場合の方が、可逆断熱変化、すなわち等エントロピ変化 ($ds=0$, isentropic) の場合より、流出時間が長いことが分かる。

ノズル出口でチョークしている $M=1$ の臨界条件では、

$$p_0 \geq p_* = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_{\text{atm}} \approx 1.89 p_{\text{atm}} \text{ であり、(4)、(5) 式が}$$

適用される。(4)、(5) 式では、膨張終了圧力が p_* である

ことに留意する。これ以下の p_0 では、(9)、(12) 式が適用

され、(4)、(5) 式と時間を接続する。

図1には、(9)、(12) 式を臨界条件以上の場合にも適用した値が点線で示されている。これは、ノズル出口断面積が A 、スロート断面積 $A_s (\leq A)$ のラバルノズルで、適正膨

張、すなわちノズル出口では常時 $p = p_{\text{atm}}$ になっているよう

な、理想膨張曲線に相当している。この曲線を実現するためには、ノズル出口断面積 A が一定の場合、スロート断面積 $A_s (\leq A)$ は連続的に変化するものでなければならない。

図2は、内径 $\phi = 3 \text{ mm}$ ノズル出口のシュリーレン写真で

ある ((株) 大沢商会 レンズシュリーレンシステム SHL-80L)。ノズル出口がスロートに相当し、理想的には $M=1$ の音速条件となる。 $p_{\text{exit}} > p_{\text{atm}}$ のため、大気中では超音速の不足膨張噴流となり、以降ダイヤモンドショックパターンが観測される。この場合は(4)、(5)式が適用される。

図2は $p_{\text{exit}} = p_{\text{atm}}$ となる場合で、 $p_0 < p_*$ で、亜音速噴流

になり、(9)、(12) 式を適用する。

図 4 に流出時間の目視による概略実験値を示す。実験における貯気槽は $V = 24l$ (アネスト岩田キャンベル オイルフリーコンプレッサー エルフ)、市販のエアガンのノズル内径は $\phi = 3\text{ mm}$ であり、貯気槽温度は常温とみなせば、

$$a_{00} \approx 340\text{ m/s}$$

$$t_{c\text{ nominal}} \approx 10\text{ s}$$

となる。実験に近いとされる貯気槽の等エントロピ変化⁽⁴⁾を仮定した(4)式と実験値のずれは、ノズルに接続する内径 $\phi = 6.5\text{ mm}$ 長さ 5 m のエアホース等の摩擦損失等の影響とみなされ、

$$t_{c\text{ fit}} = t_{c\text{ nominal}} \times 0.43$$

と補正すれば、実験と理論の傾向は概ね一致する。

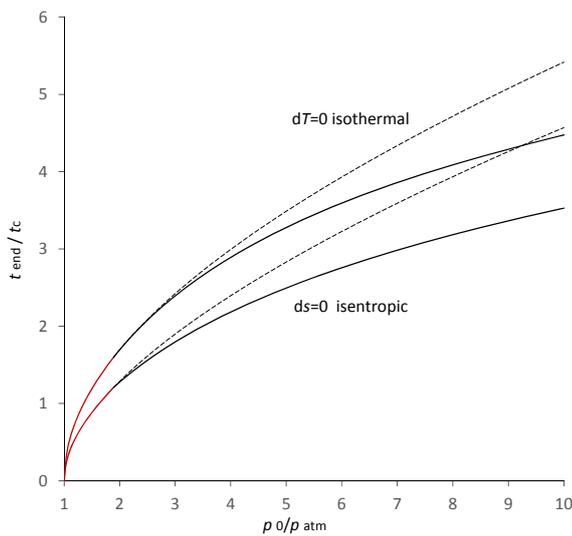


図 1 流出時間公式

Fig. 1 Blowdown time formula

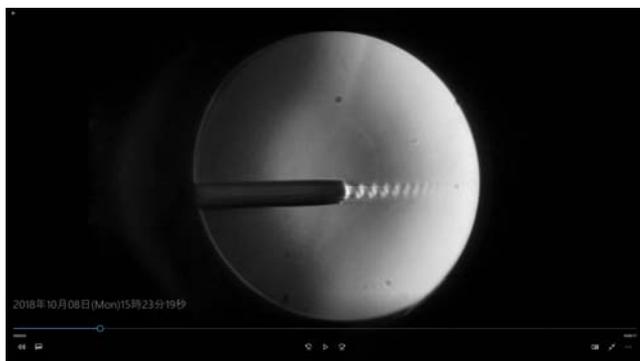


図 2 不足膨張超音速噴流 $p_{\text{exit}} > p_{\text{atm}}$

Fig. 2 Under-expanded supersonic jet

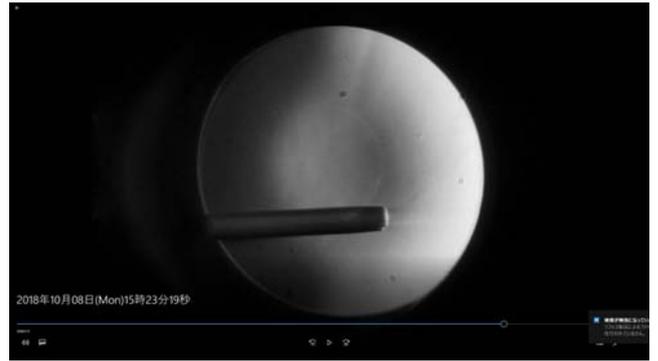


図 3 亜音速噴流

Fig. 3 Subsonic jet $p_{\text{exit}} = p_{\text{atm}}$

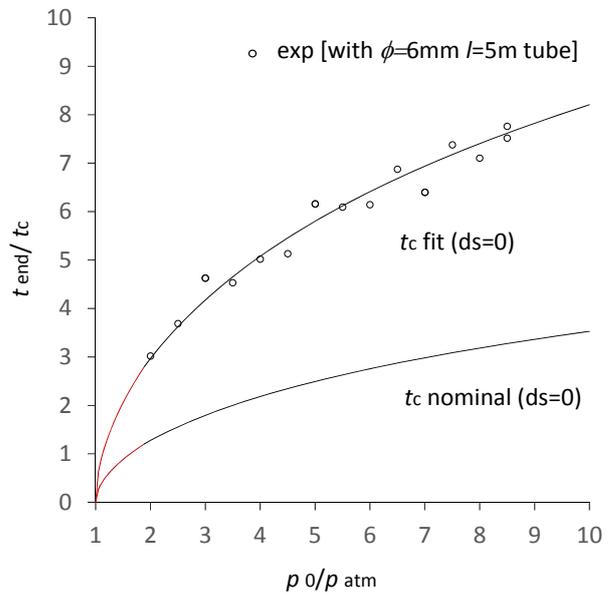


図 4 流出時間の実験と等エントロピ理論

Fig. 4 Blowdown experiment and isentropic theory

4. まとめ

気体の貯気槽からの流出問題について、臨界条件時の既知解に加えて、亜臨界時の流出公式を導出し、総流出時間に関する知見を得た。本ノートで導出した亜臨界に対する流出公式は、臨界条件においても、常に適正膨張が可能な仮想的なスロート可変ラバルノズルからの流出時間を与える。配管損失を補正することにより、理論値が実験の傾向を説明できる。

参考文献

- (1) Imrie, B. W., Compressible Fluid Flow, Butterworth-Heinemann (1973)
- (2) Schreier, S., Compressible Flow, John Wiley & Sons (1982)
- (3) Anderson, J. D. Jr., Modern Compressible Flow: With Historical Perspective, McGraw-Hill (2004)
- (4) Saad, M. A., Compressible Fluid Flow, 2nd ed., Prentice-Hall, pp.103-117 (1985)