《研究ノート》

数学における形式知への移行の困難性

北　島　茂　樹

キーワード

数学、形式知、極限

Key Word

Mathematics,　Formal Knowledge,　Limit

1. David Tallの『How Human Learn to Think Mathematically』について

David Tallは、フィールズ賞受賞者でもあるMichael F. Atiyahのもとトポロジーに関する業績でオックスフォード大学にて学位を取得し、後に、数学・教育・心理学の統合の第一人者であるRichard R. Skempより数学教育の学位を取得した、幼稚園から大学院までのあらゆる段階の数学の教授・学習に携わる研究者である。『How Human Learn to Think Mathematically』(邦訳『数学的思考 — 人間の心と学び —』）における着想は、Tallが何年にもわたって発展させてきた理論を融合したものである。中でも、第10章「形式知への移行（The Transition to Formal Knowledge)」で述べられた内容は、教育学部で数学や数学教育について学ぶ学生の育成を考えるとき、示唆に富むものであるといえる。

2. 形式知への移行における困難性

ここで取り上げる第10章では、学生が高等学校までに習う学校数学（school mathematics）の具象化（embodiment）と記号化（symbolism）から、大学で学ぶ集合論的定義と形式的証明に基づく形式数学（formal mathematics）へと移行するにあたって直面する課題についての考察がなされている。その中で、実数の形式的構造（formal construction）を見直し、学生がどのように数学的解析（mathematical analysis）における極限の概念を理解しようとするのかを説明している。そのことにより、それまでの具象化と記号化の意味にもとづく「自然な」(natural) アプローチから、集合論の定義からの演繹にもとづく

「形式的アプローチ」(formal approach) までの、個人の様々な概念の範囲が明らかになるのだという。

Tallによれば、「有理数から実数への移行は、多くの学生にとってひとつの分水嶺」であり、第10章3節「Real Numbers and Limits (実数と極限)」では、次のように述べられている。

学校では、$\sqrt{2}$、π、eのような無理数に出会い、これらの無理数がどんなものであるか正確には分からないまでも、数直線上には有理数でない数が存在することを理解し始める。

歴史的には、こうした新しい数のもつ難しい性質は、整数を別の整数で割って得られる有理数ではないことを示す無理数という名前に表れている。ジョン・モナハンによれば、16歳から18歳の学生には、こうした後から加えられた数はどうも「正しくない」と考えている者もいる[1]。それらは整数を使った単純計算では得られない数である。$\sqrt{2}=1.414\cdots$のようにこうした数は無限小数になり、「無限」の数と考えられるが、それは大きさが無限ではなく、広がりが無限である。これらは、小数桁が無限に続くため正確には計算できない。

循環小数$0.999\cdots$は特殊例である。これは、例えば小数第n位までの$1-(1/10^n)$となる計算を行って近似する。この近似は、1に限りなく近づくが、決して1にはならない。この結果、大多数の学生や教師は、$0.999\cdots$は1に等しくない。彼らは、それは1より少しだけ小さいと思っている[2]。

このような解釈が起るのは、その奥に何か理由がある。生物学的脳は$S_n=1-(1/10^n)$という項を処理しなければならず、「nが増加するにつれて」何が起こるかを考えなければならない。脳は、各項を同じように理解すると仮定するので、nが増加するとともに変化する一つの変化する項について考える。これが、異なる項の連続から一つの変化する項へと知識を圧縮することである。この変化する項は、1に限りなく近づくものの1には等しくならない。だから極限も1に限りなく近づくものの1には等しくならないと考えるのは自然である。

こうした、量は「いくらでも近く」や「いくらでも小さく」できるという考えは、いくら小さくしても0にはならないという心的概念に自然と行き着く。こうした観念は、具象化においても記号化においても生じる。

このいくら小さくしても0にはならないという考えは、鉛筆で描いた点や紙上に描いた直線から得た経験とも重なる。このように描いた点は小さいものの目には見えないほどではないため、「限りなく小さく」なることが想像できる。直線も、どんなに細くても幅をもっており、緻密さを求めるなら、可能な限り細く描ける。しかし太さのないものを描くことはできない。結果として、我々が知覚に基づいて思い描ける点や直線は、限りなく小さく、限りなく細くなる。たとえ我々が、位置を持つが大きさを持たない点や長さを持つが幅を持たない線について、プラトン的思考を持ち込んでも、生物学的脳が以前出会ったことがある点や線についてどんなに小さくても大きさを持つという振る舞いに左右される。

本学の教育学部においても、同様に考えている学生は少なくない。また、0.999･･･が1に等しいと考えている学生の中には、次のようなに証明を試みる者もいる。

$$1/3 = 0.333\cdots$$

となるため、その両辺に3をかけると、

$$1 = 0.999\cdots$$

となる。

この場合、「1/3＝」の部分は問題を言いかえているだけであり、本質的には何の説明になっておらず、そもそも「･･･」についての定義も与えられていない。他にも、高等学校で数列の和を求めるときに用いるような考えを用いて、次のような証明を試みる者もいる。

$$a = 0.999\cdots$$

とおき、次のように両辺を10倍する。

$$10a = 9.999\cdots$$

これらを、辺々を引いて、

$$\begin{array}{rr} & 10a = 9.999\cdots \\ -) & a = 0.999\cdots \\ \hline & 9a = 9 \end{array}$$

よって、両辺を9で割って、

$$a = 1$$

となる。

この場合も、無限級数でこのような引き算を行ってよいのか何の定義もないまま示されており、やはり数学的な議論とはいえない。ただ、学生が高等学校までに習ってきたものが学校数学であることを考えると、厳密な議論をするかどうかはその授業を担当した教員がどこまで扱うかによるため[3]、学生だけの責任とはいえない。

しかしながら、問題はそれほど簡単ではない。例えば、ここで「0.999･･･」を「$0.9(1+(1/10)+(1/10)^2+(1/10)^3)\ +\cdots)$」という無限級数と考え、本文にあるようにその和を$S_n=1-(1/10^n)$とした上で、その極限をとることで「1」となることを示せばよいのであるが、大学に入学してくる学生のうち、学校数学で扱われている「極限」の概念が既習でない者もいるため、その議論そのものを捉えることができず、上の二つの「証明」らしきものについても、何が問題であるのかを共有することができないからである[4]。

3．形式知への移行の必要性

Tallは、「無限小（infinitesimal）は、人の脳機能の自然な産物である」とした上で、「1/3=0.333･･･や$\sqrt{2}$=1.4142･･･のような無限小数の広がりは当初、極限そのものよりも極限に近づくものと考えられてきた」のだという。Tallは、生成的極限（generic limit）や生

成的接線（generic tangent）について、「生成された考えは、特殊例がより一般概念の典型であると考えることから生まれる」とした上で、次のように述べている。

この現象について有効となる例が、私の研究生であるラン・リーの研究で起こった。彼は数学を教えることを研究している学部生に次のように尋ねた。

(A) 0.1+0.01+0.001+･･･とずっと足していくとき、厳密に答えを求めることができるか？（はい/いいえ）

(B) $1/9=0.\dot{1}$であるが、1/9は0.1+0.01+0.001+･･･に等しいか？（はい/いいえ）

支持された回答として、(A)に対しては「いいえ」で、(B)に対しては「はい」である[5]。そこで学生に質問したところ、(A)については、これを左から右へ0.1+0.01+0.001+･･･というように潜在的無限過程を終わらないものとして記号を読んだのに、(B)については、1/9=0.1+0.01+0.001+･･･では、必要な項分を割ってみる姿が見られた。

この課程で、私は、収束する列について、あるものが他のものよりも早く収束することを体験するために、プログラムを書く機会を学生に与えて、無限小数は有限の近似値に実用上必要なだけ近づく固定値を指すことを注意深く説明した。私はこの原理を説明する例を与えた。特に、小数第n位までの0.999･･･9は$1-(1/10^n)$であり、任意の正数εに対して、$n>N$であるなら、1と0.999･･･9を小数第n位までとったものとの差がεより小さくなるNが存在することを示した。$1/\varepsilon$を十進数で表して、$10^N>1/\varepsilon$となるようなNを選ぶ。そのとき、$n>\mathrm{N}$ならばいつでも、$1/10^n<\varepsilon$となり、1と0.999･･･9を小数第n位までとったものとの差はどんなときでもεより小さくなるNが存在することを説明した。私は、極限とは、その定義に従って収束する数列についての、固定数であることに注目した。

講義前には、学生のほとんど（25人中21人）は0.999･･･が1より小さいと信じていたが、筋の通った説明をすることでその見方を変えられると信じていた。二週間後、私が再び同じ質問をしたところ、23人中21人がなお0.999･･･が1より小さいと答えた。その後の議論で、「0.999の繰り返し」は決して1には達しないと確信しているため、そうでないと定義することは真でない、ということが学生にとって主な論拠であることがわかった。

またTallは、この結果に関わり、次の研究についても取り上げている。

ニコラス・ウッドは、一年以上解析の手法を学んできた純粋数学の学生に質問をした。「最小の正の実数は存在するか？」また「最初の正の実数は存在するか？」と彼が尋ねたとき、少数派ながらかなりの学生が最初の正の実数はあるが最小の正の実数はないと答えた[6]。

こうした相反する回答が出たことは、その元になる経験がある。幾何学的または代数学的には最小の正の実数xは存在しえない。なぜなら$1/2x$の方がより

小さい正の数になるからである。しかしながら、算術の記号化において、数値を、例えば小数第四位まで表したなら、最初の0でない数が存在するし、具体的に0.0001は「0.000を繰り返して最後に1」という形の無限の桁数の場合と考えられる。これは、1－0.999･･･の差がゼロの連続で、小数の「最後の」桁に1が来ると考えることに関係する。

学生にとって、「実数」という言葉は、学校数学で耳にしたことがある一方で、高等学校において扱われる実数は、整数や有限小数、あるいは無限小数で表される数といった程度の扱いでしかない。それは現行の高等学校学習指導要領における数学Ⅲを習ったことがある学生にとっての「極限」についても同様である。そのため、学生がこのように考えることは、無理からぬことなのかもしれない。まして、数学Ⅲを履修していない学生にとっては、そもそも何を言われているのかが分からないのかもしれない。

しかしながら、たとえそうであったとしても、数学の教員免許状の取得を目指すのであれば、数学の諸概念の理解は、将来その学生に数学を習う子どもがいるかもしれないことを考えると、重要である。そのためにも、数学における形式知への移行は、教育学部の学生にとっても必要であり、避けては通れないものであるはずである。

なお、本稿で述べた内容の詳細については、引用・参考文献に挙げた書籍を参照されたい。

【引用・参考文献】

Tall, D.(2013)『How Human Learn to Think Mathematically：Exploring the Three Worlds of Mathematics』, Cambridge University Press.

Tall, D著、礒田正美、岸本忠之監訳(2016)『数学的思考－人間の心と学び－』、共立出版。

【注】

[1] Monaghan, J. D.(1986). *Adolescent's Understanding of Limits and Infinity*. Ph.D thesis, University of Warwick.

[2] Cornu, B.(1991). Limits. In D.O. Tall(Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-66). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[3] 数学的帰納法による証明を扱う場面で、「･･･」が厳密に扱われてこなかったことに触れる高等学校の教員はいるものの、それは一般的ではない。

[4] 現行の高等学校学習指導要領における「数学Ⅲ」を履修することなく、教育学部で大学の数学を学ぶ機会を得る学生がいることは、何も本学に限ったことではないが、本質的に「数とは何か」を考える場面に与える影響は少なくない。

[5] Li, L., & Tall, D. O.(1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming. In *Proceeding of PME* 17, Japan, 2, 41-8.

[6] Wood, N. G.(1992). *Mathematical Analysis: A Comparison of student development and historical development*. Ph.D thesis, Cambridge University.