

運動量理論とペルトン水車のトルク測定

森 下 悦 生¹

Momentum Theory and Torque Measurement of a Pelton Hydro Turbine

Etsuo MORISHITA¹

We test a Pelton hydro turbine as one of the educational topics in the fluids engineering experiments. The theoretical characteristics of the Pelton wheel is derived from the momentum theory of fluid mechanics. Care must be taken when we apply the momentum theory to the moving bucket of the turbine although the derivation process is well established. We first revisit the application process of the momentum theory to the Pelton wheel. Torque and the efficiency of a Pelton hydro turbine is measured by our students during the course work, and we compare the experimental results to the theory. Pelton hydro turbine is a very good subject to learn the momentum theory in the fluid mechanics.

キーワード：運動量理論, ペルトン水車, 流体機械

Keywords : Momentum theory, Pelton hydro turbine, fluid machinery

1. はじめに

流体力学や流体工学の分野では、運動量理論は重要であって、物体に作用する流体力を、物体を囲む境界面の情報から決定しようとするものである。学部履修科目としての機械工学実験において、ペルトン水車が扱われており、この流体機械は運動量理論によってその理論的なトルクや効率を解析的に求めることができる。本報告では、まず運動量理論の一般的な取り扱いに触れ、その拡張としてペルトン水車の問題を再確認する。また、明星大学機械工学系の実験室に設置されているペルトン水車を用いた学生実験で得られたデータと理論を比較してみる。

2. 運動量理論

2.1 検査体積

運動量理論では、図 1 のような静止検査体積を考える。図 1 において、 \mathbf{f} : 体積力ベクトル、 \mathbf{n} : 単位法線ベクトル、 \mathbf{o} : 原点、 p : 静圧、 \mathbf{r} : 位置ベクトル、 S : 検査面 (B : 物体、 ε : 微小積分路、 ∞ : 境界)、 \mathbf{V} : 速度ベクトル、 Vol : 検査体積、 x, y, z : 座標、 $\boldsymbol{\tau}$: 摩擦応力テンソル、である。

図 1 における運動量と角運動量のつり合いは⁽¹⁾、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \mathbf{V} dVol = - \int_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{Vol} \rho \mathbf{f} dVol \quad (1)$$

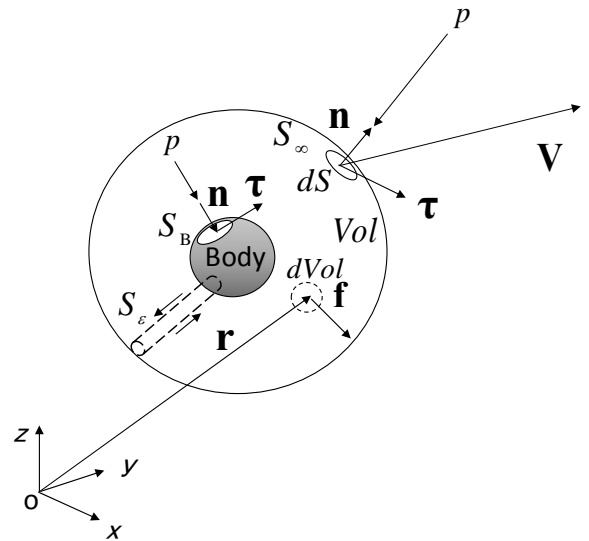


図 1 静止検査体積

Fig.1 Stationary control volume

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{V}) dVol = \int_S \mathbf{r} \times [-\rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS] + \int_S \mathbf{r} \times (-p \mathbf{n} dS) + \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{Vol} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dVol \quad (2)$$

2.2 流体機械における運動量理論

ポンプや水車は回転しており、羽根車に作用する流体力について考える場合、回転の影響を考慮する必要がある。

1 明星大学理工学部総合理工学科機械工学系 常勤教授 流体工学

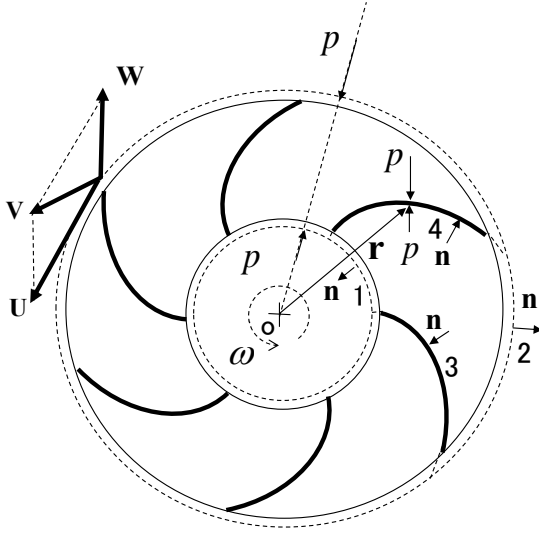


図2 回転羽根車
Fig.2 Rotating impeller

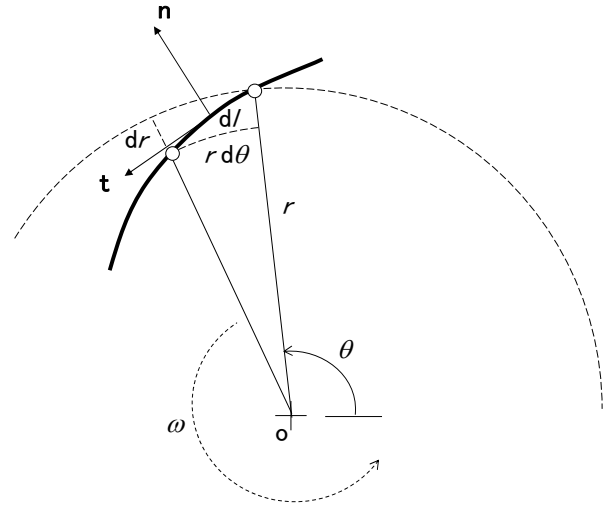


図3 羽根要素
Fig.3 Impeller blade element

流体工学の教科書などでは羽根車内部の流動には着目せず、静止した流出入部分に着目して適用するのが通例となっている。ここでは、さらに踏み込んで、流体機械内部を含めて考える手法について考察してみる。

図2は回転羽根車を表しており、図において、 \mathbf{U} ：羽根車周速度ベクトル、 \mathbf{V} ：流れの絶対速度ベクトル、 \mathbf{W} ：流れの相対速度ベクトル、 ω ：回転角速度、1：流入面、2：流出面、3：羽根車圧力面、4：羽根車負圧面、である。

羽根車と共に回転する回転座標系においては、コリオリ力と遠心力が加わり、角運動量の保存則は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{W}) dVol \\ &= \int_S \mathbf{r} \times [-\rho \mathbf{W} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS] + \int_S \mathbf{r} \times (-p \mathbf{n} dS) \\ &+ \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} dVol \\ &+ \int_{Vol} \mathbf{r} \times \rho [2\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})] dVol \end{aligned} \quad (3)$$

定常で、摩擦が無く、体積力も作用しない条件では、羽根車の紙面に垂直な単位幅について

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{r} \times [\rho \mathbf{W} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dS] + \int_S \mathbf{r} \times (p \mathbf{n} dS) \\ & - \int_{Vol} \mathbf{r} \times \rho [2\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})] dVol = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (5)$$

$$\mathbf{W} = W_r \mathbf{e}_r + W_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (7)$$

であり、 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ ：円筒座標系単位ベクトル、 n_r, n_θ ：法線ベクトル成分、 W_r, W_θ ：相対速度成分、 $\boldsymbol{\omega} (= \omega \mathbf{e}_z)$ ：角速度ベクトル、である。

図3を参照して、羽根車表面の単位接線ベクトル \mathbf{t} と単位

法線ベクトル \mathbf{n} は、

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{dr}{dl}, \frac{rd\theta}{dl} \right) \quad (8)$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{rd\theta}{dl}, \frac{dr}{dl} \right) \quad (9)$$

ここで、

$$dl = \sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2} \quad (10)$$

となり、 $dS = dl$ であるので、 S_3 （全ての羽根の合計）については、法線ベクトルの向きに留意して、

$$\int_{S_3} \mathbf{r} \times (p \mathbf{n} dS) = \int_{S_3} r \mathbf{e}_r \times \left(-\frac{rd\theta}{dl} \mathbf{e}_r - \frac{dr}{dl} \mathbf{e}_\theta \right) p dl = -\mathbf{e}_z \int_{S_3} p r dr \quad (11)$$

同様に、 S_4 については、

$$\int_{S_4} \mathbf{r} \times (p \mathbf{n} dS) = \int_{S_4} r \mathbf{e}_r \times \left(\frac{rd\theta}{dl} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dl} \mathbf{e}_\theta \right) p dl = \mathbf{e}_z \int_{S_4} p r dr \quad (12)$$

コリオリ力と遠心力については、

$$2\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} = 2(W_r \mathbf{e}_r + W_\theta \mathbf{e}_\theta) \times \omega \mathbf{e}_z = -2\omega W_r \mathbf{e}_\theta + 2\omega W_\theta \mathbf{e}_r \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \omega \mathbf{e}_z \times (r \mathbf{e}_r \times \omega \mathbf{e}_z) = \omega \mathbf{e}_z \times -r \omega \mathbf{e}_\theta = r \omega^2 \mathbf{e}_r \quad (14)$$

(4)式は、 S_1 では $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ 、 S_2 では $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ であるので、

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \mathbf{r} \mathbf{e}_r \times [\rho(W_r \mathbf{e}_r + W_\theta \mathbf{e}_\theta)(-W_r) dS] \\ & + \int_{S_2} \mathbf{r} \mathbf{e}_r \times [\rho(W_r \mathbf{e}_r + W_\theta \mathbf{e}_\theta)(+W_r) dS] \\ & - \mathbf{e}_z \int_{S_3} p r dr + \mathbf{e}_z \int_{S_4} p r dr \\ & - \int_{Vol} \mathbf{r} \mathbf{e}_r \times \rho [-2\omega W_r \mathbf{e}_\theta + 2\omega W_\theta \mathbf{e}_r + r\omega^2 \mathbf{e}_r] dVol = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$ の項のみ残って、 $dS = r d\theta$ (1 と 2)、

$$dVol = 2\pi r dr \text{ から } (S = 2\pi r, Vol = \pi(r_2^2 - r_1^2))$$

$$\mathbf{e}_z \left(\begin{aligned} & -2\pi r_1^2 \rho W_{r1} W_{\theta 1} + 2\pi r_2^2 \rho W_{r2} W_{\theta 2} \\ & - \int_{S_3} p r dr + \int_{S_4} p r dr + \int_V 2\rho r \omega W_r \cdot 2\pi r dr \end{aligned} \right) = 0 \quad (15)$$

羽根車を単位時間あたり通過する体積流量 Q について、 $W_r = V_r$ であるので

$$Q = 2\pi r V_r = 2\pi r_1 V_{r1} = 2\pi r_2 V_{r2} = 2\pi r_1 W_{r1} = 2\pi r_2 W_{r2} = 2\pi r W_r \quad (16)$$

また、

$$W_\theta = V_\theta - U = V_\theta - r\omega \quad (17)$$

従って、羽根車に作用する時計周りのトルク T は、

$$\dot{m} = \rho Q \quad (18)$$

を単位時間あたりの質量流量として、

$$\begin{aligned} T &= \int_{S_3} p r dr - \int_{S_4} p r dr \\ &= -\rho Q W_{\theta 1} r_1 + \rho Q W_{\theta 2} r_2 + \rho \omega Q (r_2^2 - r_1^2) \quad (19) \\ &= \rho Q (W_{\theta 2} + r_2 \omega) r_2 - \rho Q (W_{\theta 1} + r_1 \omega) r_1 \end{aligned}$$

$$T = \rho Q V_{\theta 2} r_2 - \rho Q V_{\theta 1} r_1 = \dot{m} (V_{\theta 2} r_2 - V_{\theta 1} r_1) \quad (20)$$

結局羽根車は流体から回転を妨げられるようなモーメントを受ける。逆に羽根車は接続された動力源によって、流体に反時計周りの角運動量を与える。

ポンプを駆動するのに必要なパワ P (動力) は、 $U = r\omega$ なので、

$$P = T\omega = \dot{m} (V_{\theta 2} U_2 - V_{\theta 1} U_1) \quad (21)$$

ポンプの総ヘッドを $H = \frac{\Delta p_0}{\rho g}$ とすれば、 $P = Q\Delta p_0$ なので、

$$H = \frac{1}{g} (V_{\theta 2} U_2 - V_{\theta 1} U_1) \quad (22)$$

ここで、 $\Delta p_0 (= p_{02} - p_{01})$: 総圧差、である。水車の場合は、

$W_r = V_r < 0$ となるので、受けるトルクの向きは逆になるだ

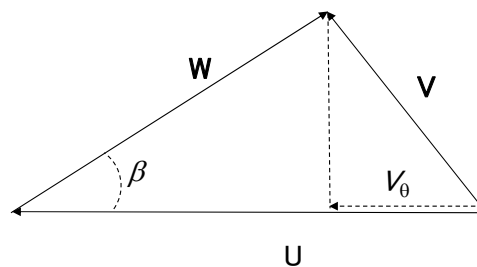


図 4 速度三角形

Fig.4 Velocity triangle

けで、取り出せるパワは同じ表現となる。

(22) 式はオイラーのポンプの式²⁾と呼ばれるものであり、回転座標系における角運動量保存則からも導けることを確認できた。

2.3 回転座標系におけるベルヌーイの式

ポンプの総ヘッド H は、ポンプ前後の総ヘッドの差となるので

$$H = \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) \quad (23)$$

図 4 から、

$$V^2 = U^2 + W^2 - 2UW \cos \beta = U^2 + W^2 - 2U(U - V_\theta)$$

となるので、

$$V_\theta U = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} W^2 \quad (24)$$

(22)、(23)、(24) 式より、 $U = r\omega$ であるので、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{g} (V_{\theta 2} U_2 - V_{\theta 1} U_1) = \frac{P_{02} - P_{01}}{\rho g} \\ &= \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{r_2^2 \omega^2}{2g} - \frac{W_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{r_1^2 \omega^2}{2g} - \frac{W_1^2}{2g} \right) \quad (25) \\ &= \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) \end{aligned}$$

(25) 式より、

$$\frac{W_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2g} = \frac{W_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2g} = \text{const} \quad (26)$$

$$\frac{W^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z - \frac{r^2 \omega^2}{2g} = h_{0rel} - \frac{U^2}{2g} = \text{const} \quad (27)$$

ここで、

$$h_{0rel} = \frac{W^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (28)$$

は相対総水頭である。(27) 式が、回転座標系のベルヌーイの式である。

3. ペルトン水車

3.1 運動量理論

従来の教科書に記述された運動量理論に従った説明は以下のようである⁽³⁾。

図5はペルトン水車の概念図であり、図6は図5のペルトン水車バケット部を紙面に垂直な断面内で見たものに対応する。動力源となる水噴流の流速ベクトルが \mathbf{V} 、ペルトン水車の周速ベクトルが \mathbf{U} である。バケット部に流入する流れの相対速度ベクトルは \mathbf{W} であり、その大きさは

$$W = V - U \quad (29)$$

バケット部で運動量を与えた流体は反転して、同じ大きさの相対速度 W で角度 β の方向に流出する。これは非圧縮流体の連続の式からの要請である。従って流出した流体の絶対速度ベクトル \mathbf{V}' は、図6を参照して

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \mathbf{W} + \mathbf{U} = (-W \cos \beta, W \sin \beta) + (U, 0) \\ &= (-W \cos \beta + U, W \sin \beta) \end{aligned} \quad (30)$$

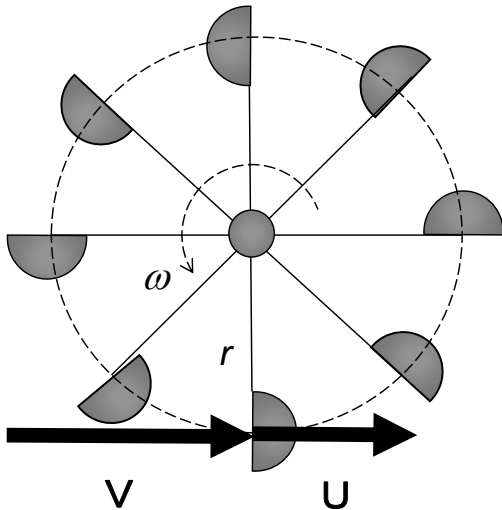


図5 ペルトン水車

Fig.5 Pelton hydro turbine

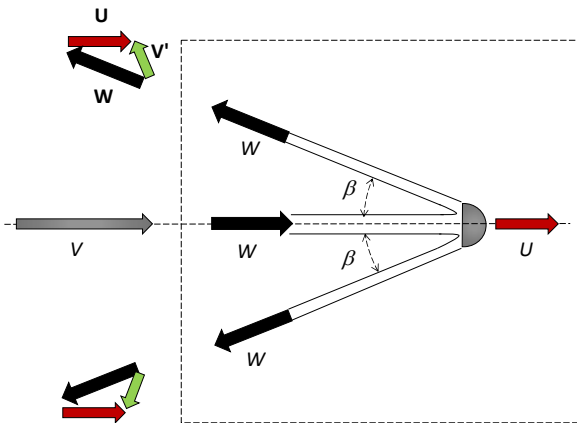


図6 バケット断面

Fig.6 Bucket cross section

(30)式より、静止側で観測した流れの断面積は流出入で変化することに留意する必要がある。

噴流方向の運動量変化はバケット部に加わる力 F に等しいので、

$$\begin{aligned} F &= \dot{m}[V - (-W \cos \beta + U)] \\ &= \dot{m}(V - U)(1 + \cos \beta) \end{aligned} \quad (31)$$

トルク T とパワー P は、

$$T = rF = \dot{m}r(V - U)(1 + \cos \beta) \quad (32)$$

$$P = T\omega = \dot{m}U(V - U)(1 + \cos \beta) \quad (33)$$

トルク係数 C_Q と効率 η は

$$C_Q \equiv \frac{T}{\dot{m}(2r)V} = \frac{1 + \cos \beta}{2}(1 - \phi) \quad (34)$$

$$\eta \equiv \frac{P}{\frac{1}{2}\dot{m}V^2} = 2(1 + \cos \beta)\phi(1 - \phi) \quad (35)$$

ここで、

$$\phi \equiv \frac{U}{V} \quad (36)$$

は速度比である。

3.2 回転する検査体積における運動量理論の適用

図2は回転する羽根車に固定した座標系で表されている。この図をペルトン水車に適用する場合について考えてみる。ペルトン水車は $r_2 = r_1 \equiv r$ のように、外周と内周を極限まで接近させた場合と等価であると見なすと(20)式は、

$$T = \dot{m}(V_{2\theta}r_2 - V_{1\theta}r_1) = \dot{m}r(V_{2\theta} - V_{1\theta}) \quad (37)$$

(37)式において、流入側を2、流出側を1として、

$$V_{2\theta} = V \quad (38)$$

$$V_{1\theta} = -W \cos \beta + U \quad (39)$$

のように対応させれば、(32)と同じであることが示せる。

3.3 トルク測定

図7に学生実験で使用されているペルトン水車を示す。バケットの基準円直径は200mm、バケット数は20である。左下部のノズルから水噴流が供給され、その供給圧力 Δp は水車入力水頭のラベルのついたブルドン管圧力計によって計測される。図7の水車前方のブレーキによってトルクが加えられ、電子秤で力を計測する。回転中心から秤までの距離からトルクを求める。回転数を計測し、動力も求める。バケットに流入する水噴流の速度 V は、損失が無いものとして、



図 7 ペルトン水車
Fig.7 Pelton hydro turbine

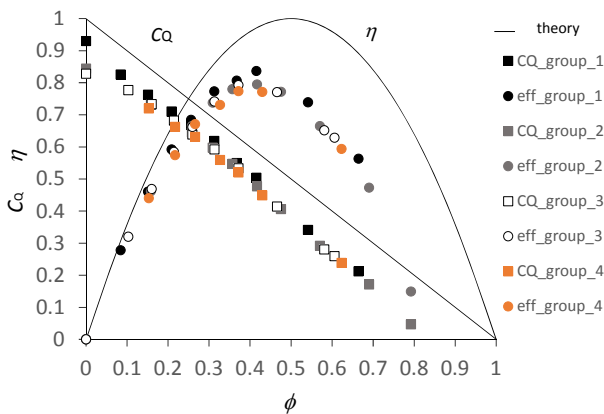


図 8 トルク係数 C_Q と効率 η 理論と実験

Fig.8 Torque coefficient C_Q and efficiency η
Theory vs. experiment

$$V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (40)$$

図 8 は、(34)、(35) 式から得られる、 $\beta=0$ とした場合の理論的なトルク係数 C_Q と効率 η 、 $V \approx 20\text{m/s}$ における 4 組の学生実験グループによる測定値を示している。静止時のトルクに差異が認められるが、実験は概ね再現する。グループ 4、3、1、2 の実験順に、若干の効率の変化が認められるが、軸受け等の馴染みの可能性が考えられる。実験におけるトルクは、軸受の摩擦、設計構造は $\beta=0$ となっているが実際の流出方向は $\beta>0$ となり得ること、バケットが有限枚数であることなどの影響も含めた、流体損失の分だけ理論値より小さくなる。また、ブレーキ負荷を 0 にしても軸受分のトルクは残るので、無負荷でも $\phi = u/v < 1$ が予想される。即ち、空回し状態でも、水車の速度は水噴流のそれより遅くなると見込まれる。実験における効率のピークは、トルクが左に偏った分だけ速度比 ϕ の小さい側に来る。実験における速度比 ϕ の上限は、安全上回転速度を制限しているためである。

同様の実験装置がウェブ上に見受けられる⁽⁴⁾。

4. まとめ

運動量理論の流体機械への適用について考察し、オイラーの式の導出過程について再検討を行った。従来の教科書に示されている解説に加えて、定常回転する検査体積における取扱いを示した。運動量理論から得られるペルトン水車のトルクと効率を学生実験の結果と比較し、損失の影響などについて考察した。運動量理論の機械への具体的な適用例としてのペルトン水車のトルク測定は、流体工学の学生向け実験のテーマとして相応しい。

参考文献

- (1) Warsi, Z.U.A., : Fluid Dynamics - Theoretical and Computational Approaches 2nd Ed., CRC Press pp.29-43(1999)
- (2) 妹尾泰利：内部流れ学と流体機械，養賢堂，pp.38-40 (1977)
- (3) 日本機械学会編：機械工学便覧，応用編，B5 流体機械，pp.47-48 (1986)
- (4) http://www.gunt.de/index.php?option=com_gunt&task=gunt.list.category&product_id=889&lang=en