【教育ノート】

相対性理論へのガイド

合田　一夫

A guide to the theory of relativity

Kazuo GODA

This paper is a guide to the special and general theory of relativity. I hope that the notes assist students to learn the theory of relativity.

キーワード：相対性理論，座標変換，

Keywords：Relativity , Transformation of coordinate system

前号（50 号)で物理学における座標変換について述べたが，今回はその中で述べた相対論について，座標変換に注目し基本的な考え方と学ぶポイントについて述べる。

□座標系の変換

○座標系の回転

ベクトル$\boldsymbol{A}$ は方向と大きさを持つ量で，幾何学的に扱えるが，座標系を設定し，

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

のように解析的に表すことができる。

・座標変換による位置または位置ベクトルの変換

物体の位置は物理量の一つで，対象物の位置座標は座標系の変換により変換される。

座標変換における位置の変換の意味に二通りあり，注意が必要である。

ｉ．座標系（座標軸）を変換し，対象物はそのまま。

z軸を回転軸とした回転の場合，座標軸を角度 θ だけ回転する場合を考える。

対象物の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}\\ &= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z\,\boldsymbol{k}'\\ \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta\\ \boldsymbol{j}' &= -\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta\\ \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は，直交座標系の基底で，線形独立な単位ベクトルである。

座標は，

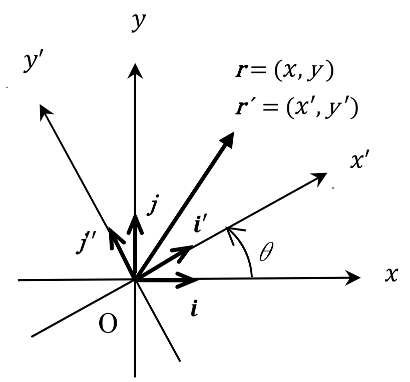

図 1　座標系の回転

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta + y\sin\theta\\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta\\ z' &= z\end{aligned}$$

と変換される。行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{\mathrm{i}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で，

$$\boldsymbol{r}' = R_{\mathrm{i}}\,\boldsymbol{r}$$

と表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix} = R_{\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

明星大学理工学部総合理工学科物理学系　教授　原子物理学，放射線物理学

$$R_{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} R_{\mathrm{i}} = I$$

の関係がある。

ベクトルの成分は

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R_{\mathrm{i}} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

と変換される。

ⅱ． 座標系（座標軸）はそのまま，対象物（の座標(位置ベクトル $\boldsymbol{r}$)) を移す。

座標を移すことを，点を写すともいう。

回転の場合，角度 αだけ移すとし，座標は，

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$z' = z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{\mathrm{ii}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

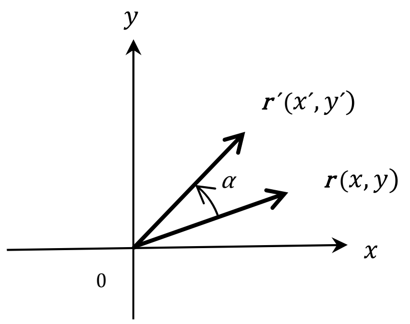

図２　ベクトルの回転

と変換される。

$$\boldsymbol{r}' = R_{\mathrm{ii}}\boldsymbol{r}$$

$$R_{\mathrm{ii}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを回転 R_{ii}による座標変換という。

$R_{\mathrm{ii}} = R_{\mathrm{i}}^{-1}$ または $R_{\mathrm{ii}} R_{\mathrm{i}} = I$ (I 単位行列)

ⅰとⅱは，$\alpha = -\theta$ とすると同等となる。

・ベクトルの回転

ベクトルの $\boldsymbol{A}$ の回転は，座標変換に対しては ⅱ に相当し，$\boldsymbol{i}$ ，$\boldsymbol{j}$ ，$\boldsymbol{k}$を直交座標系の基底として

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = R_{\mathrm{V}} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$R_{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変換される。

$$\boldsymbol{A}' = A_x'\boldsymbol{i} + A_y'\boldsymbol{j} + A_z'\boldsymbol{k}$$

・線形変換（ⅱの方式の場合）

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は，行列 Aにより数の組みが写されること（変換）を表し，このような変換を線形変換という。

〇スカラー，ベクトル，テンソル

相対論では，数学的形式としてスカラー，ベクトル，テンソルの概念が用いられる。

位置ベクトルや速度などのように物理量はスカラー，ベクトル，テンソルで表すことができ，場所の関数である。これを場の量という。これらは，座標変換に対して，それらの量がどのように変換されるかに注目して定義されている。

スカラー関数$\Phi(x)$は座標変換に対し

$$\Phi(x,y,z) = \Phi'(x',y',z')$$

と変換し，その値は変わらない。Φ をスカラー関数という。

座標の変換は一般に回転と平行移動で表され，直交座標系で，

$$x' = R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z - b_1$$

$$y' = R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z - b_2$$

$$z' = R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z - b_3$$

となる。

・ベクトル

ベクトルは，大きさと方向を持ち，方向は座標軸への成分で表される。座標変換に対し，大きさは不変で成分が変わる。ただし，座標軸の平行移動では，成分は変わらない。

直交座標系の座標の回転による同一の点の座標は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される。

ベクトルは物理量を数学的に表したもので，回転 R に対しベクトル自身は変わらず

$$\boldsymbol{V} = V_x \boldsymbol{i} + V_y \boldsymbol{j} + V_z \boldsymbol{k} = V_x' \boldsymbol{i}' + V_y' \boldsymbol{j}' + V_z' \boldsymbol{k}'$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ：直交単位ベクトル

であり，その成分は

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$V_i' = \sum_j R_{ij} V_j$$

と変換される。これをベクトルの変換則という。逆に，このように変換されるものをベクトルの定義としている。

例えば，$\boldsymbol{r}$ は(x, y, z) を成分とする位置ベクトルで，速度 $\boldsymbol{v}$ は (v_x, v_y, v_z) ，力 $\boldsymbol{F}$ は (F_x, F_y, F_z) を成分とするベクトルである。

(V_1, V_2, V_3)をベクトルといい，V_1, V_2, V_3 を成分とするベクトルを V_i で表すことがある。

一般には，ある量 $\boldsymbol{V}$ が n 個（n 次元）の成分をもち，直交座標系において１次座標変換（回転や鏡像）

$x_i' = \sum_j a_{ij} x_j$ または $x_j = \sum_i a_{ij} x_i'$

$A = (a_{ij})$ ， A 直交行列 （ ${}^{t}A = A^{-1}$）

に対し各成分が

$V_i' = \sum_j a_{ij} V_j$ [ベクトルの定義]

と変換される $\boldsymbol{V}$ をベクトルと定義する。

基底ベクトルは，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表すと

$\boldsymbol{e}_j' = \sum_i a_{ji} \boldsymbol{e}_i$ または $\boldsymbol{e}_i = \sum_j a_{ji} \boldsymbol{e}_j'$

と変換される。

係数 a_{ji} について，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i{}_j$, $\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = \delta^i{}_j$ より

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta^i{}_j \ , \ \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta^i_j$$

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

である。

また， $\Phi(x, y, z)$ をスカラー関数として $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ は，

$$\Phi'(x_i') = \Phi(x_i)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x_i'} = \sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$$

$x_j = \sum_i a_{ij} x_i'$ から $\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = a_{ij}$

したがって

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x_i'} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

よりベクトルである。

・テンソル

テンソル T は多成分をもち（３次元では3^n個，n 階テンソル），これらの成分は，上記の座標の変換に対し，

$$T_{ij}' = \sum_{k,l} R_{ik} R_{jl} T_{kl}$$

すなわち、テンソルは、座標変換 R（回転）により

$T' = R\, T R^{\mathrm{T}}$ [テンソルの定義]

と変換される。

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般には直交座標系において１次座標変換

$x_i' = \sum_j a_{ij} x_j$ ，$A = (a_{ij})$ ， A 直交行列

に対しその成分が

$T_{ij}' = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} T_{kl}$ [テンソルの定義]

と変換される９個(３次元，2階の場合)の数の組をテンソルと定義する。

また，複数のベクトルの成分の積（ 2 階の場合，2 個のベクトル u_i ， v_i の各成分の積 $T_{ij} = u_i v_j$）は，テンソルと同じ変換をされ，この成分の組はテンソルである。T_{ij} を成分とするテンソルを T_{ij} で表すことがある。

また，テンソルは，$\boldsymbol{u} = T\,\boldsymbol{v}$ のようにベクトルを別のベクトルに変える演算子の役目をする。

テンソルを $n \times n$ の行列で表したとき，演算は行列の定義（約束）による。

ベクトルは，行ベクトル(a_x, a_y, a_z) ，または列ベクトル $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ で表される。両者は，物理の上では同じものだが，行列・テンソル演算においては，テンソルは行ベクトルの右から，列ベクトルの左から演算することと約束されている。また，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

とすると

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = (a_x, a_y, a_z)$$

・座標変換とベクトル

ベクトル $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = V_x \boldsymbol{i} + V_y \boldsymbol{j} + V_z \boldsymbol{k}$$

は回転の座標変換に対し

$$\boldsymbol{V}' = V_x'\,\boldsymbol{i}' + V_y'\,\boldsymbol{j}' + V_z'\,\boldsymbol{k}'$$

とすると，成分は，

$$V_x' = V_x \cos\theta + V_y \sin\theta$$
$$V_y' = -V_x \sin\theta + V_y \cos\theta$$
$$V_z' = V_z$$

と変換され，基底ベクトルは，

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$$
$$\boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta$$
$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$$

と変換される。

$$\boldsymbol{V}' = \sum_i V_i'\boldsymbol{e}_i' = \sum_i\left(\sum_j a_{ij}V_j\right)\boldsymbol{e}_i' = \sum_j V_j\left(\sum_i a_{ij}\boldsymbol{e}_i'\right)$$
$$= \sum_j V_j\boldsymbol{e}_j$$

から

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$$

となる。

座標回転に対して定義されたベクトル自身は回転の座標変換に対して変わらない。ベクトルで表された関係式は座標変換(回転)に対し形が変わらず，共変であるという。ニュートンの運動方程式 $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$ は回転の座標変換に対し方程式の形は変わらない。

ベクトルで表された法則（方程式）は回転の座標変換をしても形は変わらず共変である。

□特殊相対論

慣性の法則（外力が働かないときは、物体は静止、または等速運動をする）が成り立つ座標系を慣性系といい，特殊相対性理論は，

・物理の法則はすべての慣性系に対して同じように成り立つ。すなわち，ある慣性系で成り立つ物理量の関係（方程式）が，別の慣性系における座標変換された物理量の関係においてもそれぞれの物理量が同じように変換されて法則を表す方程式の形が変わらない。(座標変換に対し共変であるという。)［相対性原理］

・光の速度は光源の運動にかかわらず一定である。［光速度不変の原理］

を原理として，理論を展開したものである。

2 つの慣性系を S，S′ (S′系 は S 系に対して x軸方向に一定の速度 vで移動)とする。ある物理的現象が起きたことをその座標系の時刻（時計）と場所（物差し）で示し，事象という。ある事象を点 P（世界点)で表し，P は，S 系で P (x, y, z, t) ，S′系で P (x', y', z', t') で与えられる。4 つの座標は時空座標と呼ばれ，同一の点に対するそれぞれの系の座標軸の目盛の読み（測定値）である。

座標系は観測者と関係し，ある事象の座標は，それぞれの系での観測値である。特殊相対性理論では慣性座標系間の座標変換を考える。

原理(公理ともいう)：論理の展開の出発点になる言明。通常は，直接は証明できない。原理が正しいかは，それから導かれた結果が実験で検証されるかによる。

法則：自然現象について，物理量を定義し，それらの間で成り立つ関係を主に式で表す。原理と似て，論理の展開の基となり，導かれた結果は実験で検証さなければならない。

注意 1）共変とは，各座標系で観測した点 P の目盛の読み (x, y, z, t) と (x', y', z', t') が互いに変換され，′（プライム）のつかない座標系から ′ のついた座標系の変換に対し，物理法則を表す方程式が ′ のついた方程式に変換され，方程式が同じ形で表されることを意味する。一方の座標系で起こる現象は他方でも同様に起き得るということである。

注意 2）事象自体は 1 つの固有のもので，観測者によって，現象は異なってみえ，初期条件，境界条件が各座標系で異なる。

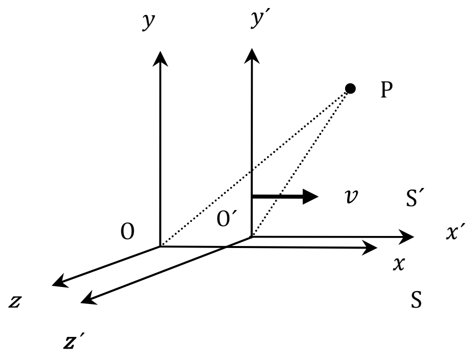

図 3　2 つの慣性系

〇ローレンツ変換

上述の原理から光速は常に一定の値 c となる。このため，図 3 の O と O′が一致したとき $t = t' = 0$ で光が原点から放射され P に達したとすると，

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0.$$

このため S 系と S′系での時空の世界点の関係は，

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

[ローレンツ変換]

また逆変換は，相対性原理から上式で v を $-v$ と置いて，座標のプライムを付け替えたものになるはずで，

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ y = y'\ ,\ z = z'\ ,\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

となり，これらは**ローレンツ変換**とよばれる。このように，特殊相対論では，S 系と S′系との座標変換において，時間と空間が一緒になって変換され，4 次元時空の空間を考える。また，ローレンツ変換は，座標系の変換である S 系と S′系の変換に伴い相対性理論において適用される同一の世界点の時空座標系の変換である。

非相対論的近似 $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ では

$$x' = x - v\,t,\quad t' = t$$

と，ガリレイ変換になる。

物体の速度については，S 系に対し x 軸方向に速度 V で物体が動くとき，S′系での速度 V' は，　ローレンツ変換から

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

また，

$$V = \frac{\mathrm{d}x}{dt}$$

より

$$V' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

となる。 S 系での光速 c は，S′系でも c である。

さらに，

$$t_1 - t_0 = \frac{t_1{}' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{t_2{}' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_1{}' - t_2{}'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

より S 系でみると S′系での時間 $t_1{}' - t_0{}'$ は遅れてみえる。

逆に，

$$t_1{}' - t_0{}' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

より S′系でみると S 系での時間 $t_1 - t_2$ は遅れてみえ，互いに相手の時間が遅れてみえる。

・ローレンツ収縮

S′系で静止している長さ l_0 のもの（物体が静止している系で測った長さを物体の真の長さという）は，静止系 S 系でみると

$$l_0 = x_1{}' - x_2{}' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

より，長さが

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

と測定される。すなわち，動いている物体の長さは，真の長さより短く観測される。

・不変量

世界点 P の座標を $(x,\ y,\ z,\ t)$ とすると

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$
$$= -c^2\ t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

とすると，s あるいは s^2 は，S 系と S′系どちらの座標系でも同じ値となり，ローレンツ変換に対する不変量である。また，ローレンツ変換は s^2 を不変に保つ変換ともいえる。s を原点と世界点との距離と定義する。

3 次元の原点と P の距離は $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$　で，３成分 $(x,\ y,\ z)$ で表される。

・時空でのベクトル・テンソル　[4 元ベクトル]

ローレンツ変換 L は，空間を 1 次元で表すと

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad x' = \frac{x - v\ t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

である座標変換である。

時空でのベクトルも回転の変換に対してと同様に定義され，回転の変換 R に対しローレンツ変換 L も 1 次の座標変換で，行列で表され，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix},\quad \tanh\theta = \frac{v}{c}$$

である。L は対称行列である。ローレンツ変換に対し，距離は不変で成分が上式のように変わる量を時空ベクトル(4 元ベクトル)という。

相対論では，粒子の位置，速度などは，ローレンツ変換に対して

$$\begin{pmatrix} A^{0\prime} \\ A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \\ A^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

のように決まった変換をされる 4 元ベクトルで表される。

・ベクトルとその内積

ベクトルは座標変換に対し成分が変わるが，大きさは変わらずスカラーである。2 つのベクトルの内積は座標に依存しないスカラーである。時空での内積を新たに定義する。ベクトル A の長さは　$\sum_\mu A^\mu A_\mu$ である。添え字の上下については，$A^0 = A_0$，$A^1 = -A_1$, $A^2 = -A_2$，$A^3 = -A_3$ と定義する。また，

$$\sum_\mu A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$
$$(\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$\sum_\mu A_\mu B^\mu$ または $\sum_\mu A^\mu B_\mu$ をベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ の内積といい，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ と書く。

時空でのテンソルはローレンツ変換 L に対して

$T' = L\ TL^{\mathrm{T}}$　　**[ローレンツ変換に対するテンソルの定義]**

と変換されるものをいう。

特殊相対論では，自然法則を表す方程式はローレンツ変換に対して共変であることを原理としている。物理量は時空での S 系から S′系への座標変換に対しローレンツ変換されるスカラー，4 元ベクトル，テンソルとして表される。

〇粒子の運動

粒子の様々な運動に対する世界点の変化は，４次元空間の曲線を描き世界線という。特殊相対性理論では慣性系での４次元時空中のある世界線に対する 2 点間の微小距離 $\mathrm{d}s$ を

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

$$=-(\mathrm{d}x^0)^2+(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2 \quad [1]$$

と定義する。$x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ とし，この座標をまとめて x^μ と書く。変位を表す x^μ はベクトルの成分と考えることができる。

距離は２点間の曲線のうち最短のものをいい，ds を世界線の長さ，または，世界間隔という。ds を積分した世界線の長さは粒子の経路により異なる値を持つ。dx^μ は座標 x^μ の微小差である。

dsの二乗は、S 系と S′系の両座標系において

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}\tau^2$$
$$=-c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$$
$$=-c^2\mathrm{d}t'^2+\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2$$

となり，ds (s)と dτ (τ)もローレンツ変換に対し不変となる。すなわち，どの慣性系においても（ローレンツ変換をしても）同じ値となる。逆に言えばローレンツ変換は，ds^2 がどちらの座標系でも不変になるような座標変換である。これらは光の場合だけに限らない。光に対しては d$s^2=0$ ，物体の運動に対しては d$s^2<0$ となる。

座標変換に対し不変なものをスカラーといい，ds を不変距離（固有距離）という。３次元の空間における距離 dr^2＝dx^2＋dy^2＋dz^2 に対応し，この場合座標の回転に対して距離d r は不変で，成分 dx, dy, dz は座標変換に対し変わる。dsはローレンツ変換に対して不変となる。

上式[1]は世界間隔と時空との関係を示し，3 次元の距離を拡張したものである。特殊相対論の基本は，時空が，慣性系間の観測者の変換に対し，世界間隔が不変になるように決められているということである。

dτは，上式から

$$\mathrm{d}\tau=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

で，dt は S 系での時間間隔，dτ は S′系での時間間隔である。なお，v は S 系からみた S′系の速さで，これは S′系に静止している粒子の速さとも考えられ，S 系からみた粒子の速さである。dτ は，粒子が静止している座標系または粒子自身が持つ時計での時間間隔で**固有時**という。

経路にそって積分した τ もローレンツ変換に対し不変であり，s が最小の経路の時，τ は最大となる。

物理では物理的変化量をごく小さい領域での変化を考え，微分で表すことが多い。(微分形)　それから積分を用いて広い領域での変化を求める。また，座標(x,y,z) は位置ベクトルの成分として原点に関係するが，微分形（dx, dy, dz）は，変化量だけが対象で原点を問題としない本来のベクトルとなる。位置ベクトルは束縛ベクトルとよばれ，特別なベクトルである。また一般に、座標変換において微分形は無限小において互いに線形の関係になる。

・相対論的運動方程式

特殊相対性理論では法則の形は，ローレンツ変換に対して同じ形にならなければならない。ニュートンの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

はこの要請を満たさない。

相対性原理を満たす（ローレンツ変換に対して方程式の形が変わらない）相対論的運動方程式は，次のようである。

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{d\tau}=f^\mu \quad (\mu=0,1,2,3) \qquad \textbf{[相対論的運動方程式]}$$

$$u^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{d\tau}$$

を４元速度という。

$$u^0=\frac{\mathrm{d}x^0}{d\tau}=\frac{\mathrm{d}x^0}{dt}\frac{\mathrm{d}t}{d\tau}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$u^1=\frac{\mathrm{d}x^1}{d\tau}=\frac{\mathrm{d}x^1}{dt}\frac{\mathrm{d}t}{d\tau}=\frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$u^2=\frac{\mathrm{d}x^2}{d\tau}=\frac{\mathrm{d}x^2}{dt}\frac{\mathrm{d}t}{d\tau}=\frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$u^3=\frac{\mathrm{d}x^3}{d\tau}=\frac{\mathrm{d}x^3}{dt}\frac{\mathrm{d}t}{d\tau}=\frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

v_x, v_y, v_z は通常の速度である。

また，

$$p^\mu=m_0u^\mu$$

を 4 元運動量といい，

$$(p^0,p^1,p^2,p^3)=\left(\frac{m_0c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

4 元運動量の大きさは，ローレンツ変換に対して不変で

$$\sum_\mu p^\mu p_\mu=-m_0^2c^2$$

である。

4 元力 f^μ は

$$(f^0,f^1,f^2,f^3)$$
$$=\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{F_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{F_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\frac{F_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

また，$\mu=0$ の場合の式は,

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

と関係している。この式は，種々の形態を持つエネルギーは質量を持ち，また，質量はいろいろなエネルギーに転化される場合があることを示す。

〇電磁場のローレンツ変換

次のマクスウェル方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t) \quad \text{電場のガウスの法則}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \quad \text{磁場のガウスの法則}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$ ファラデーの法則

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$ アンペール-マクスウェル　の法則

$$[\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{D}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}]$$

は，ローレンツ変換に対して同じ形になる。すなわち，S 系でも S′系でも物理量の関係式（方程式）はローレンツ変換に対して同じように変換され，

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{x}',t')=\rho'(\boldsymbol{x}',t')$$
$$\nabla'\cdot\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}',t')=0$$
$$\nabla'\times\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}',t')=-\frac{\partial\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}$$
$$\nabla'\times\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}',t')=\boldsymbol{i}'(\boldsymbol{x}',t')+\frac{\partial\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}$$

となり，S 系での方程式が S′系では物理量や座標に ′（プライム）を付けたものになる。これは次のことを用いて示される：

マクスウェル方程式の物理量はベクトルで表され，各成分について考える。

$$\nabla'=\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

偏微分の変数変換の公式 による

$$F=F(x,t),\quad x=x(x',t'),\quad t=t(x',t')$$
$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t},$$

また、ローレンツ変換から

$$\frac{\partial x}{\partial x'}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad \frac{\partial t}{\partial x'}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{v}{c^2}$$

これらから

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(v\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z}.$$

さらに，S 系と S′系での電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ についての次の関係

$$E_x{}'=E_x,\quad E_y{}'=\frac{(E_y-vB_z)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad E_z{}'=\frac{(E_z+vB_y)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$B_x{}'=B_x,\quad B_y{}'=\frac{\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad B_z{}'=\frac{\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

を用いる。これらの条件のもとで，マクスウェル方程式の S′系での方程式が，ローレンツ変換をしても同じ形（ マクスウェル方程式に ′ をつけた方程式）になっていることが示される。

例えば，S 系でみて，点電荷が速度 v で移動しているとすると

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho=\frac{1}{\varepsilon_0}q\,\delta(x-vt)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

は，S′系では，

$$\frac{\partial E_x{}'}{\partial x'}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x$$

$$\frac{\partial E_y{}'}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{(E_y-vB_z)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial E_z{}'}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{(E_z+vB_y)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

より

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}'=\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{v}\left((\nabla\times\boldsymbol{B})_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)\right\}$$

となり

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}'=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}q\,\delta(x-vt)\,\delta(y)\,\delta(z).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\delta(x-vt)=\delta\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\delta(x')$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\quad(\nabla\times\boldsymbol{B})_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\mu_0 i_x=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{v}{c^2}\rho$$

を用いた。また，

$$\rho'(\boldsymbol{x}',t')=q\,\delta(x')$$

とすると

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{x}',t')=\rho'(\boldsymbol{x}',t')$$

となる。

電場や磁場は，ローレンツ変換に対しては，ベクトルではなく，一体となり電磁場のテンソルで表され，マクスウェル方程式はテンソル方程式で表すことができる。

上式は，x軸方向に一定の速さvで進む座標系に対するものであるが，一般に，非相対論的近似 $\left(\frac{v}{c}\right)^2\ll 1$ では，

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}.$$

また，S 系で速度 $\boldsymbol{V}$で運動している荷電粒子の電磁場中での荷電粒子の運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$$

S′系で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'^2}=q(\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{B}')$$

となる。

□一般相対性理論

一般相対性理論は，慣性系間だけでなく任意の座標変換（一般座標変換）に対する法則の変換性を論じたものである。マクスウェル方程式は電磁場を決める法則であり，一般相対性理論は，重力に関して理論を展開したものである。アインシュタインは、

・どのような座標系（慣性系や加速度系を含む）でも物理法則（方程式）は同じ形で表される。すなわち，物理法則は，一般の座標変換に対して法則の形が変わらない。（共変である。）［一般相対性原理］

・慣性力 (加速度系で現れる見かけの力)と重力とは本質的には区別できない。微小領域では、適当な加速度系を取れば重力の影響をなくすことができる。このような座標系を局所慣性系という。[等価原理]

・重力が働かない場合（局所慣性系）では特殊相対論が成り立つ。

を原理として理論を展開した。

一般相対性理論は，これらの原理を組み合わせ，重力の法則を導き，そして，重力場と空間の歪みとを結びつけたものである。

特殊相対性理論では，物理法則を表す方程式がローレンツ変換に対して共変であることを，一般相対性理論は，一般座標変換に対し共変であることを意味し，物理量はテンソルで表されることが要請される。

・慣性力

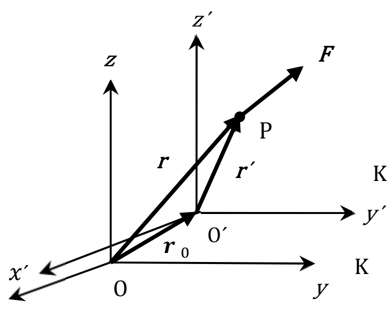

図 4 並進加速系

見かけの力ともいわれる。ニュートンの運動方程式を満たす座標系を慣性系といい，慣性系Kに対し加速度をもって動く系をK′とする。

質量 m の粒子の運動を考え，粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0$$

運動方程式は，K 系で

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = F$$

K′系で表すと，座標変換 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0$ により

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0)}{\mathrm{d}t^2}$$

から

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} - m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$$

となる。$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$ は K 系に対する K′ 系の加速度で，K′系は慣性系ではなくニュートンの運動の法則は成り立たないが，運動の法則の形にすると F のほかに $-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$ が右辺に加わり，K′系の観測者には実際の力Fにさらにこの力が働いているように見え，これを慣性力という。慣性力は加速度系に座標変換したときに現れる見かけの力で，反作用が存在しなく，作用反作用の法則を満たさない。

・一般座標変換

一般相対論では，斜交座標系や，曲線座標系などにおける一般座標系間の座標変換を考える。

一般の 4 次元時空での座標変換

$$x^{\mu\prime} = f^{\mu}(x^{\nu})$$

を考える。x^{μ} は点 P のもとの座標系での座標，$x^{\mu\prime}$ は変換された座標系での座標である。

一般座標系間の座標変換（一般座標変換）に対しても，スカラー，ベクトル，テンソルが定義できる。

・ベクトルの反変成分と共変成分

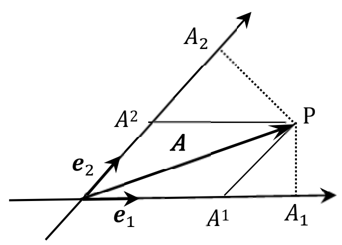

図 5 斜交軸系

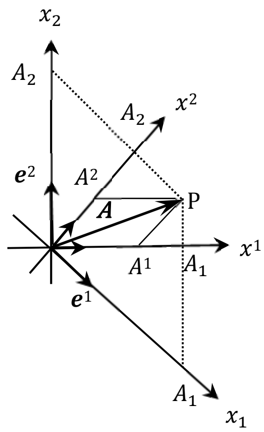

図 6 斜交軸系の反変成分と共変成分

例えば，２次元のユークリッド空間の斜交軸の場合，ベクトルの成分の取り方は 2 通りある。図の（A^1，A^2）[ベクトル $\boldsymbol{A}$ の座標軸に平行な正射影成分]をこのベクトルの反変成分，(A_1, A_2) [ベクトル $\boldsymbol{A}$ の座標軸に垂直な正射影成分]を共変成分という。

１つのベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 = A_1\boldsymbol{e}^1 + A_2\boldsymbol{e}^2$$

と２通りに表される。基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i{}_j$$

の関係がある。(A^1, A^2)を成分とするものを反変ベクトル，(A_1, A_2) を成分とするものを共変ベクトルという。反変ベクトルは，

$$\boldsymbol{A} = \sum\nolimits_i A^i\boldsymbol{e}_i,\ A^i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}^i$$

である。

反変ベクトルは，その成分が

$$A^{i\prime} = \sum\nolimits_j a^i_j A^j \quad \text{または，} \quad A^{i\prime} = \sum\nolimits_j \frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^j} A^j$$

と変換され，

共変ベクトルは，その成分が

$$A_i{}' = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i\prime}} A_j$$

と変換される。

$\boldsymbol{e}_1$， $\boldsymbol{e}_2$ を基底ベクトル（共変基底ベクトル），$\boldsymbol{e}^1$，$\boldsymbol{e}^2$を双対基底ベクトル(反変基底ベクトル)という。これは，基底ベクトルを別の基底ベクトルに変換したもので，座標変換に対しベクトルの成分と基底ベクトルは異なる変換をされる。すなわち，反変成分は元の座標系の基底ベクトルと逆に変換され，共変ベクトルは元の座標系の基底ベクトルと同様に変換される。ベクトルの反変成分と基底ベクトルを結合したものとベクトルの共変成分と双対基底ベクトルを結合したもの（ベクトル自身）が座標変換に対し不変となる。たとえば，$\boldsymbol{A} = \sum_i A^i\boldsymbol{e}_i$ において，

$$\boldsymbol{e}_i{}' = \sum\nolimits_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i\prime}}\boldsymbol{e}_j\ ,\ A^{i\prime} = \sum\nolimits_j \frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^j} A^j$$

より

$$\sum_i A^{i\prime}\boldsymbol{e}_i{}' = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^k} A^k\right)\left(\sum_l \frac{\partial x^l}{\partial x^{i\prime}}\boldsymbol{e}_l\right)$$

$$= \sum_{i,k,l} \frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^{i\prime}} A^k\boldsymbol{e}_l = \sum_{k,l} \delta^l_k A^k\boldsymbol{e}_l$$

$$= \sum_k A^k\boldsymbol{e}_k$$

添え字 k を i に変えれば

$$\sum_i A^{i\prime}\boldsymbol{e}_i{}' = \sum_i A^i\boldsymbol{e}_i$$

が成り立つ。

非直交系では反変ベクトルと共変ベクトルの違いが重要となる。ただし，直交座標系では基底ベクトルと双対基底ベクトルは同じで，反変成分と共変成分は同じになり，区別はない。

テンソルも反変テンソル，共変テンソル，混合テンソルがある。

・斜交軸間の座標変換

一般に，複数の座標系の関係式は一次結合とはならない。（例えば，球座標（r, θ, Φ）と斜交座標（x, y, z））しかし，それらの微分は線形（1 次結合）となり，

$$\mathrm{d}x = a_{11}\mathrm{d}r + a_{12}\mathrm{d}\theta + a_{13}\mathrm{d}\Phi$$

のように表される。1 つの座標系の微分 $\mathrm{d}x$ はもう一つの座標系の微分 $\mathrm{d}x'$ への変換は，微分の規則から

$$\mathrm{d}x^{i\prime} = \sum_j \frac{\partial x^{i\prime}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$$

となる。微分線要素は反変量である。

ベクトルは $\boldsymbol{A}$ は座標系の変換

$$x^{i\prime} = f^i(x^j)$$

に対しそれぞれの座標系で，反変ベクトルでは，

$$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 = \sum_i A^i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{A}' = A^{1\prime}\boldsymbol{e}_1{}' + A^{2\prime}\boldsymbol{e}_2{}' = \sum_j A^{j\prime}\boldsymbol{e}_j{}'$$

と表される。反変成分は，座標変換に対し

$$A^{i\prime} = \sum_k a^i_k A^k$$

と変換され，基底ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_k a^k_i\boldsymbol{e}_k{}' \quad \text{，または} \quad \boldsymbol{e}_k{}' = \sum_j b^j_k\boldsymbol{e}_j$$

と変換されるとすると

$$\sum_k a^i_k b^k_j = \delta^i_j$$

$$\sum_k b^i_k a^k_j = \delta^i_j$$

でなければならない。

共変成分は

$$A_i{}' = \sum_j b^j_i A_j$$

と変換される。

テンソルは，

$$T^{ij\prime} = \sum_{k,l} a^i_k a^j_l T^{kl}$$

と変換されるものを反変テンソルという。

また，

$$T_{ij}{}' = \sum_{k,l} b^k_i b^l_j T_{kl}$$

と変換されるものを共変テンソルという。

○リーマン幾何学

リーマン幾何学は n 次元の幾何学で，曲面の幾何学から一般化し，ゆがんだ空間を扱うものである。

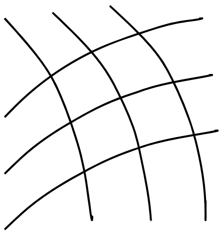

図 7　曲線座標系

曲線座標（球面座標はその 1 例）などの座標系を設定し，2 点間のいろいろな曲線の長さの最小値を距離と定義し，曲線の微小距離 $\mathrm{d}s$ とその成分である微小座標差 $\mathrm{d}x^i$ との関係を

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}x^i \cdot \sum_i \boldsymbol{e}_j \mathrm{d}x^j = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

$$(\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}\ ) \qquad [2]$$

とし，g_{ij}を計量テンソルと言う。ここでは，座標の目盛は直接に物理的意味と対応しなくても良い。距離 $\mathrm{d}s$ は，どのような座標系でも同じで，一般座標変換しても不変であり，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2 \ .$$

微小座標成分 $\mathrm{d}x^i$ と計量 g_{ij} は変わり，g_{ij} は

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{k,l} g'_{kl}\mathrm{d}x'^k\mathrm{d}x'^l,\ g'_{kl} = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}\, g_{ij}$$

[計量の座標変換]

と変換される。このように，g_{ij}は座標系の変換に対して変わり，測定により決められる。g_{ij}を計量テンソルという。

このように任意の座標変換に対し距離が定義された空間をリーマン空間という。式 [2] は空間の特性を表し，計量テンソルは曲面の形状を定め，一般相対性理論では時空の歪みを決める。アインシュタインは，重力場が，時空の計量を決めると考えた。

テンソルで表された方程式 $B_{\mu\nu} = 0$ は一般座標変換に対し　$B_{\mu\nu}{}'\ (x') = 0$ となり，共変である。

・ベクトルの平行移動とベクトルの微分

ベクトル場は場による変化量が大切で，これは場の微分で表される。また，物理の基本法則は微分方程式で表される。ベクトルの微分は，近接した 2 点のベクトルの一方をもう一方に平行移動し，その差である。

一般座標系では，ベクトル場の微分は成分のみならず，その基底ベクトル$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$の微分も大きさと向きが変化する。

$$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2\ ,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^1} = \frac{\partial(A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2)}{\partial x^1}$$

$$= \frac{\partial A^1}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial A^2}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_2 + A^1\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial x^1} + A^2\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial x^1}$$

この基底ベクトルの変化を考慮した微分を共変微分という。リーマン空間のベクトル場の微分はベクトルの成分ではないが，新たに成分を定義できる。

ここで

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{e}_k = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}$$

を定義し，Γをクリストッフェルの記号という。基底ベクトルの微分は，その場での各基底ベクトルの微分の 1 次結合で表され，Γはその基底ベクトルの微分の重みの係数を表す。クリストッフェルの記号と計量テンソルとの関係は，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = g_{ik}$，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$ などから

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

となる。

曲線座標に沿ったベクトルの平行移動はその成分が変

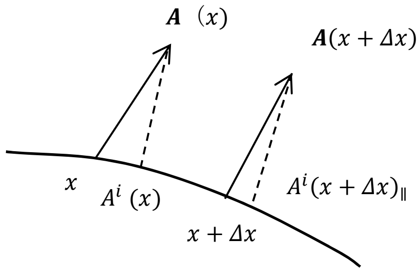

図 8　ベクトルの平行移動

り，Γ_{ij}^k を用いて

$$A^i(x+\Delta x)_\parallel = A^i\,(x) - \Gamma_{ij}^k \Delta x A^i\,(x)$$

と表すことができる。

Γ_{ij}^k は $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ とし，これは等価原理と関係している。

また，共変ベクトル$V_i(x)$ の共変微分は

$$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k\ (x)V_k(x)$$

となる。反変ベクトル $A^i\,(x)$ の共変微分は

$$\frac{\partial A^i(x)}{\partial x^k} + \sum_j \Gamma_{jk}^i\ (x)A^j\,(x)$$

となる。ベクトルの平行移動は共変微分を 0 にする移動である。

・曲率

空間の曲がりは

$$R^\mu_{\sigma\rho\lambda} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} + \sum_\kappa \Gamma^\mu_{\rho\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} - \sum_\kappa \Gamma^{\ \mu}_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma}$$

で表すことができ，リーマン曲率テンソルという。

○重力場中での粒子の運動（測地線の方程式）

自由落下するエレベーター内のように慣性力と重力が打ち消しあう系(局所慣性系（X^μ））での粒子の運動方程式に

一般座標変換をして、一般座標（一般の座標系x^μ）での，すなわち等価原理により重力中での粒子の運動方程式を，計量テンソルを用いて求めることができる。すなわち，局所慣性系での相対論的運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2X^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=0$$

から座標変換

$$x^\mu = f^\mu(X^0,\ X^1,\ X^2, X^3)$$

をして求める。

$$\frac{\mathrm{d}^2X^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=\sum_\sigma\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}x^\sigma}\right)$$

$$=\ \sum_\sigma\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\mathrm{d}^2x^\sigma}{\mathrm{d}\tau^2}+\sum_{\rho,\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{d\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{d\tau}\frac{\partial^2X^\mu}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}=0$$

局所慣性系においては，ローレンツ変換に対する不変量$\mathrm{d}s$は，非慣性系をこれにより現れる慣性力が重力を打ち消すようにとり，座標変換した場合やはり不変で，

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu$$

$$=\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}x^\rho}\frac{\mathrm{d}X^\nu}{\mathrm{d}x^\sigma}\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\sigma=\sum_{\rho,\sigma}g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\sigma$$

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

となる。座標系x^μでの計量テンソル$g_{\kappa\lambda}$は

$$g_{\kappa\lambda}=\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\lambda}\eta_{\mu\nu}$$

で，座標変換をした運動方程式を $g_{\kappa\lambda}$ を用いて表す。

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu}\frac{\partial^2X^\mu}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho}-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha}\right)\equiv\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}$$

を用いて

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}+\sum_{\rho,\sigma}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{d\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{d\tau}=0$$

となる。

また，$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ の座標変換に対する変換式は，

$$\Gamma^\mu_{\beta\gamma}{}'(x')=\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\beta\prime}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\gamma\prime}}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(x)-\sum_{\rho,\sigma}\frac{\partial^2x^{\mu\prime}}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\beta\prime}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\gamma\prime}}$$

で与えられる。

局所慣性系はその点で重力の効果が消える $\Gamma^\mu_{\beta\gamma}=0$ となる座標系である。上式で x'系を X 系にとれば

$$x'=X^\mu,\ \Gamma^\mu_{\beta\gamma}{}'(x')=0$$

より

$$\frac{\partial^2X^\mu}{\partial x^\rho\partial x^\sigma}=\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(x)$$

が導かれる。これを局所慣性系での運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2X^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=0$$

に代入し

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}+\sum_{\rho,\sigma}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{d\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{d\tau}=0$$

が得られる。

これが一般座標系で変換された慣性力の，すなわち、等価原理により重力のある系での運動方程式であり，一般座標変換に対して共変であることも証明できる。計量テンソルは重力場を与えるポテンシャルと関係している。

なお、1 次座標変換に対し$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(0)=0$ ならば変換後も$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}{}'(0)=0$ である。

次の式は，測地線の方程式といわれる。

$$\frac{\mathrm{d}^2x^l}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{j,k}\Gamma^l_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{ds}\frac{\mathrm{d}x^k}{ds}=0\quad.$$

［ 測地線の方程式 ］

添え字を時空座標で用いるギリシャ文字で表し、$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}\tau^2$と置くと前式と同じものになる。

測地線 $x^l=x^l(s)$ は，曲面上の 2 点を結ぶ最短の経路である。重力以外の力が働いていないとき，光や自由物体は測地線に沿って運動することになる。 g_{ij}を決める方程式が次の重力場の方程式である。

〇重力場の方程式

一般座標変換に対して法則の形が変わらないという一般相対性原理から物理量はテンソルで表され，物理法則はテンソルの関係式であることが要請される。

ニュートンの万有引力

$$F=-G\frac{Mm}{r^2}$$

G：万有引力定数

は，特殊相対論により光速より早く伝わるものはないことから，離れた物体間で働く力は場を介在して伝わると考え，場によって記述される。(近接作用)　すなわち，片方の物体によりその周りに力の場ができ，もう一方の物体をその位置に置いたとき場により力を受ける。この力の場をポテンシャル（位置エネルギーと関係）$\boldsymbol{\Phi(r)}$で表し，

$$\boldsymbol{F}=-m\nabla\Phi(\boldsymbol{r})\ ,\quad \nabla\ \equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\Phi(\boldsymbol{r})=-G\frac{M}{r}.$$

また，この万有引力(重力)の場は次の方程式を満たす。

$\Delta\Phi(\boldsymbol{r})=4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$，$\rho$ ；場をつくる物体の質量密度

アインシュタインは，重力場は，任意の座標変換により法則の形が不変のものはリーマン空間のテンソル方程式になっていればよいので，テンソル式で表され，歪みが小さいときは上式を満たすものと考え，相対性理論での重力の場の方程式

$$G_{\mu\nu}\,(=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\,)=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

［ 重力場の方程式 ］

を導いた。これをアインシュタインの重力場方程式という。

$g_{\mu\nu}$ は計量テンソル，$R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\sigma\rho\lambda}$$

でリッチテンソルと呼ばれ，R はスカラー曲率である。$G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル，$T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$$

でエネルギー運動量テンソルと呼ばれ，u^{μ} は 4 元速度である。

左辺が時空の歪みに関する量で，右辺は、質量とエネルギーとが等価であり、空間の歪みを生じる物質に関する量である。物質は空間を曲げ，また物体はこの式で決まる時空の歪みに沿って運動する。

重力中での粒子の運動からアインシュタインの重力方程式の $T_{\mu\nu}$ が決まり，アインシュタインの重力方程式を解いて得られる $g_{\mu\nu}$から

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu}$$

より時空の歪みが求められる。

一般相対性理論は，加速度系での慣性力と重力とを結び付け，一般の座標変換によって不変な物理法則を求め，重力場を時空の歪みと結び付けたものである。

参考図書

次の著書を主に参考とした。これらの著者に感謝します。また、詳しい式の導出についても下記の図書を参照して欲しい。

(1) 佐藤勝彦：相対性理論（岩波書店）
(2) 和田純夫：相対論的物理学のききどころ（岩波書店）
(3) 砂川重信：相対性理論の考え方（岩波書店）
(4) 戸田盛和：相対性理論 30 講（朝倉書店）
(5) 杉山直：相対論（講談社）
(6) ダニエル・フライシュ：物理のためのベクトルとテンソル （岩波書店）
(7) 江沢 洋：相対性理論 (裳華房)
(8) 安達忠次：ベクトルとテンソル (培風館)